Lineaire algebra en kegelsneden

Liliane Van Maldeghem Hendrik Van Maldeghem

Cursus voor de vrije ruimte

Hoofdstuk 1

Reëele vectorruimten

1.1 De reëele vectorruimte van de reëele n-tallen

- $\boxed{\text{Definitie}}$
  Een **reëel n-tal** is van de gedaante $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ waarbij x_1, x_2,$\cdots$,x_n reële getallen zijn.

  Verkorte notatie: $[x_i]$ met $i \in \{1, 2, \cdots n\}$ en $x_i \in \mathbb{R}$.

  De verzameling van de reële n-tallen noteren we door $\mathbb{R}^n$.

- $\boxed{\textbf{Gelijkheid van twee } n\textbf{-tallen}}$
  Twee n-tallen zijn gelijk aan elkaar als en slechts als de gelijkstandige elementen aan elkaar gelijk zijn.

  Met symbolen:

  $$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [y_1, y_2, \ldots, y_n] \Longleftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n.$$

  Verkorte notatie: $[x_i] = [y_i] \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \cdots n\} : x_i = y_i$

$\boxed{\text{De reële vectorruimte van de } n\text{-tallen}}$

- $\boxed{\text{De som van twee reële } n\text{-tallen}}$
  De **som van twee reële n-tallen** is het n-tal dat we bekomen door de gelijkstandige elementen van beide n-tallen bij elkaar op te tellen.

  Met symbolen:

  $$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R} :$$
  $$[x_1, x_2, \ldots, x_n] + [y_1, y_2, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n].$$

  Verkorte notatie: $[x_i] + [y_i] = [x_i + y_i]$ met $i \in \{1, 2, \cdots n\}$

- $\boxed{\text{De scalaire vermenigvuldiging van } n\text{-tallen}}$
  Het product van een n-tal met een reëel getal is het n-tal dat we bekomen door elk element van het n-tal met dat getal te vermenigvuldigen.

  Met symbolen:

  $$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \wedge \forall r \in \mathbb{R} : r.[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [rx_1, rx_2, \ldots rx_n].$$

  Verkorte notatie: $r \cdot [x_i] = [rx_i]$ met $i \in \{1, 2, \cdots n\}$

STELLING 1.1 *De structuur* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$ *is een reële vectorruimte*

1. De som van twee reële n-tallen is weer een reëel n-tal.
   Bewijs: Omdat $[x_i] + [y_i] = [x_i + y_i]$ en de som van twee reële getallen weer een reëel getal is geldt dat $[x_i + y_i] \in \mathbb{R}^n$

2. De som van reële n-tallen is associatief: $([x_i] + [y_i]) + [z_i] = [x_i] + ([y_i] + [z_i])$.
   Bewijs:
   $$\begin{aligned} ([x_i] + [y_i]) + [z_i] &= [x_i + y_i] + [z_i] \\ &= [(x_i + y_i) + z_i] \\ &= [x_i + (y_i + z_i)] \\ &= [x_i] + [y_i + z_i] \\ &= [x_i] + ([y_i] + [z_i]) \end{aligned}$$
   Dit bewijs steunt op de associativiteit van de som van reële getallen. Duid met een kruisje aan waar deze eigenschap van reële getallen toegepast wordt in het bewijs. Schrijf naast de andere stappen van het bewijs telkens de reden.

3. Het n-tal $[0, 0, ...0]$ is neutraal element voor de som van n-tallen.
   Bewijs: $[x_i] + [0] = [x_i + 0] = [x_i]$
   Het bewijs steunt op het feit dat 0 het neutraal element is voor de som van reële getallen.

4. Voor elk n-tal bestaat een tegengesteld n-tal. Het tegengesteld n-tal is het n-tal dat we bekomen door elk element van het oorspronkelijk n-tal te vervangen door zijn tegengestelde voor de som van reële getallen.
   Notatie: $-[x_i] = [-x_i]$
   De som van een n-tal en zijn tegengesteld n-tal is het neutraal element $[0, 0, ..., 0] \in \mathbb{R}^n$.
   Bewijs: $[x_i] + [-x_i] = [x_i + (-x_i)] = [x_i - x_i] = [0]$

5. De som van n-tallen is commutatief: $[x_i] + [y_i] = [y_i] + [x_i]$.
   Bewijs: $[x_i] + [y_i] = [x_i + y_i] = [y_i + x_i] = [y_i] + [x_i]$
   Het bewijs steunt op de commutativiteit van de som van reële getallen.

6. Het product van een reëel getal en een n-tal is weer een n-tal.
Bewijs: Omdat $r \cdot [x_i] = [rx_i]$ en het product van twee reële getallen weer een reëel getal is, geldt dat $[rx_i] \in \mathbb{R}^n$.

7. Het product van een n-tal met een reéel gatal is distributief t.o.v. de som van n-tallen: $r \cdot ([x_i] + [y_i]) = r \cdot [x_i] + r \cdot [y_i]$.
Bewijs:
$$\begin{aligned} r \cdot ([x_i] + [y_i]) &= r \cdot [x_i + y_i] \\ &= [r(x_i + y_i)] \\ &= [rx_i + ry_i] \\ &= [rx_i] + [ry_i] \\ &= r \cdot [x_i] + r \cdot [y_i] \end{aligned}$$
Dit bewijs steunt op de distributiviteit het product t.o.v. de som van reële getallen. Duid met een kruisje aan waar deze eigenschap van reële getallen toegepast wordt in het bewijs. Schrijf naast de andere stappen van het bewijs telkens de reden.

8. De som van reële getallen is distributief t.o.v. het product van een n-tal met een reëel getal: $(r + s) \cdot [x_i] = r \cdot [x_i] + s \cdot [x_i]$.
Bewijs:
$$\begin{aligned} (r + s) \cdot [x_i] &= [(r + s)x_i] \\ &= [rx_i + sx_i)] \\ &= [rx_i] + [sx_i] \\ &= r \cdot [x_i] + s \cdot [x_i] \end{aligned}$$
Dit bewijs steunt op de distributiviteit het product t.o.v. de som van reële getallen. Duid met een kruisje aan waar deze eigenschap van reële getallen toegepast wordt in het bewijs. Schrijf naast de andere stappen van het bewijs telkens de reden.

9. Het product van een van een n-tal met een reëel getal is gemengd associatief: $r \cdot (s \cdot [x_i]) = (rs) \cdot [x_i]$
Bewijs:
$$\begin{aligned} r \cdot (s \cdot [x_i]) &= r \cdot [sx_i] \\ &= [r(sx_i)] \\ &= [(rs)x_i] \\ &= (rs) \cdot [x_i] \end{aligned}$$
Dit bewijs steunt op de associativiteit het product van reële getallen. Duid met een kruisje aan waar deze eigenschap van reële getallen toegepast wordt in het bewijs. Schrijf naast de andere stappen van het bewijs telkens de reden.

10. Het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging van n-tallen is $1 \in \mathbb{R}$.
Bewijs: $1 \cdot [x_i] = [1xi] = [x_i]$

Omdat de structuur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$ een reële vectorruimte is, worden de n-tallen ook vectoren genoemd.

1.2 Lineaire combinatie van vectoren

Zijn $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$ m vectoren van een reële vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$ en zijn $r_1, r_2, \ldots, r_m$ m reële getallen, dan noemen we de vector

$$\vec{v} = r_1.\vec{v_1} + r_2.\vec{v_2} + \cdots + r_m.\vec{v_m}$$

een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$.

OPMERKING: Een lineaire combinatie van één vector is een veelvoud van die vector.

Voorbeelden.

- In de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$ is het koppel $[-10, -12]$ een lineaire combinatie van de koppels $[-1, 2]$, $[2, 4]$ en $[3, 2]$ want

  $$[-10, -12] = 3[-1, 2] - 5[2, 4] + [3, 2].$$

  Dit geldt omdat

  $$\begin{cases} -10 = & 3(-1) + (-5)2 + 3 \\ -12 = & 3 \cdot 2 + (-5)4 + 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

  Het is handiger in een lineaire combinatie de vectoren als kolommatrices te schrijven

  $$\begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  Dit laatste geeft aanleiding tot hetzelfde stelsel 1.1.

- In de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ is het 3-tal $(3, -3, -4)$ een lineaire combinatie van de 3-tallen $(1, -1, 0)$, $(2, 0, -3)$ en $(1, 1, 1)$ want

  $$(3, -3, -4) = 2(1, -1, 0) + (2, 0, -3) - (1, 1, 1)$$

  Dit geldt omdat

  $$\begin{cases} 1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 1 & + & 1(-1) & = & 3 \\ (-1)2 & + & 0 \cdot 1 & + & 1(-1) & = & -3 \\ 0 \cdot 2 & + & (-3)1 & + & 1(-1) & = & -4 \end{cases}$$

  Met kolommatrices:

  $$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Het stelsel

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 2 \\ 4x - 6y - 7z = 7 \end{cases}$$

kan geschreven worden als een lineaire combinatie van kolommatrices.

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Het stelsel oplossen zal erop neerkomen een lineaire combinatie van 3 vectoren $[2,4]$, $[3,-6]$ en $[-5,-7]$ te zoeken zodat we de vector $[2,7]$ bekomen.

OPGAVEN — 1 Gegeven zijn de vectoren

1. $[30, 105, 170, 40]$, $[25, 80, 130, 10]$ en $[25, 70, 120, 30]$
2. $[3, -4, -5]$ en $[6, -7, 2]$.
3. $(1, -4, 8]$, $[4, -7, -4]$ en $[8, 4, 1]$.

(i) Tot welke vectorruimte behoren de vectoren;

(ii) Bepaal een vector die een lineaire combinatie is van de vectoren. Schrijf de combinatie met kolommatrices.

1.3 Lineaire onafhankelijkheid van vectoren

m vectoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$ zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de nulvector maar op één manier kan geschreven worden als lineaire combinatie van deze m vectoren, nl. de lineaire combinatie met de scalairen allen gelijk aan nul.
Met symbolen:

$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m} \text{ zijn lineair onafhankelijk}$$

$$\Updownarrow$$

$$r_1.\vec{v_1} + r_2.\vec{v_2} + \cdots + r_m.\vec{v_m} = \vec{o} \Longrightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$$

De m vectoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_m}$ zijn lineair afhankelijk als en slechts als ze niet lineair onafhankelijk zijn.

Voorbeelden:

- De vectoren $(1,2,3)$ en $(4,5,6)$ zijn lineair onafhankelijk omdat geldt dat het $(3,2)$-stelsel

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

slechts één oplossing heeft, nl. $(x, y) = (0, 0)$. Uit $x \cdot (1, 2, 3) + y \cdot (4, 5, 6) = (0, 0, 0)$ volgt dat $(x, y) = (0, 0)$.
Merk op dat geen van de twee vectoren een veelvoud is van de andere vector.

- De vectoren $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ en $(7, 8, 9)$ zijn lineair afhankelijk omdat geldt dat het $(3, 3)$-stelsel

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oneindig veel oplossingen heeft.
Na toepassen van de methode van Gauss vinden we het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{c} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow . \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = -2z \end{array} \right.$$

Uit $x \cdot (1, 2, 3) + y \cdot (4, 5, 6) + z \cdot (7, 8, 9) = (0, 0, 0)$ volgt dat $(x, y, z) = r \cdot (1, -2, 1)$.
Praktisch betekent dit laatste dat

$$1 \cdot (1, 2, 3) - 2 \cdot (4, 5, 6) + 1 \cdot (7, 8, 9) = (0, 0, 0),$$

m.a.w. elk van de vectoren is te schrijven als een lineaire combinatie van de twee andere vectoren, bvb.

$$(7, 8, 9) = 2 \cdot (4, 5, 6) - (1, 2, 3)$$

- De vectoren $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ en $(7, 8, 9)$ zijn lineair afhankelijk omdat geldt dat het $(3, 3)$-stelsel

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oneindig veel oplossingen heeft.
Na toepassen van de methode van Gauss vinden we het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow . \left\{ \begin{array}{c} x = -2y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Uit $x \cdot (1, 2, 3) + y \cdot (2, 4, 6) + z \cdot (7, 8, 9) = (0, 0, 0)$ volgt dat $(x, y, z) = r \cdot (-2, 1, 0)$.
Praktisch betekent dit laatste dat

$$-2 \cdot (1, 2, 3) + 1 \cdot (2, 4, 6) + 0 \cdot (7, 8, 9) = (0, 0, 0),$$

m.a.w. de vector $(1, 2, 3)$ is te schrijven als een lineaire combinatie van de twee andere vectoren,

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{2}(2, 4, 6) + 0 \cdot (7, 8, 9)$$

ook de vector $(2,4,6)$ is te schrijven als een lineaire combinatie van de twee andere vectoren,

$$(2,4,6) = 2 \cdot (1,2,3) + 0 \cdot (7,8,9)$$

De vector $(7,8,9)$ is niet te schrijven als lineaire combinatie van de twee anderen. We kunnen de gelijkheid niet oplossen naar $(7,8,9)$ omdat de coëffiënt nul is.

Deze berekeningen waren eigenlijk allemaal overbodig omdat we reeds bij het begin zien dat de eerste twee vectoren veelvouden zijn van elkaar. De eerste twee zijn reeds lineair afhankelijk dus zijn de drie vectoren ook lineair afhankelijk.
We kunnen dus zeggen dat de drie vectoren afhankelijk zijn omdat er minstens ëën te schrijven is als een lineaire combinatie van de twee anderen.

De m **vectoren** $\vec{v_1}$**,** $\vec{v_2}$**, ...,** $\vec{v_m}$ **zijn lineair afhankelijk** als en slechts als minstens één van de vectoren te schrijven is als een lineaire combinatie van overige $m-1$ vectoren.
Met symbolen:

$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_i}, \ldots, \vec{v_m} \text{ zijn lineair afhankelijk}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in \{1,2,\ldots,m\} \wedge \exists (r_1, r_2 \ldots r_m) \in \mathbb{R}^{m-1} : \vec{v_i} = r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2} + \cdots + r_m\vec{v_m}.$$

Een verzameling vectoren is een **vrije verzameling** als en slechts de vectoren van de verzameling lineair onafhankelijk zijn.

OPGAVEN — 2 Schrijf de eerste vector als een lineaire combinatie van de volgende vectoren indien mogelijk. Zijn er ook soms meerdere mogelijkheden?

1. $[7,8,9]$ en $[1,2,3]$, $[4,5,6]$;
2. $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$ en $[-6,4]$, $[3,-2]$;
3. $[0,5]$ en $[3,-6]$, $[-4,8]$;
4. $[7,8]$ en $[1,2]$, $[4,5]$;
5. $[9,5,1]$ en $[2,1,3]$, $[-1,3,1]$, $[-1,1,1]$;
6. $[14,18,5]$ en $[3,2,1]$, $[2,-1,1]$, $[-1,1,1]$;
7. $[23,-20,41]$ en $[1,2,7]$, $[3,-3,6]$, $[-1,3,-2]$;
8. $[8,56,37]$ en $[0.2,3,0.25]$, $[0.5,-1,2.5]$, $[-1.25,-1,-4]$;
9. $[1,-1,1,1]$ en $[1,2,4,-1]$, $[-2,1,1,2]$;
10. $[0,4,-2,1]$ en $[0,1,-2,3]$, $[1,-3,4,-5]$, $[-2,2,1,4]$, $[3,1,2,2]$;
11. $[0,2]$ en $[1,1]$, $[1,2]$, $[1,3]$;
12. $[0,1,-1,2]$ en $[1,0,-2,1]$, $[2,1,3,-1]$, $[4,1,-1,1]$, $[-1,2,1,1]$, $[-1,1,1,1]$;

3 Zijn de volgende vectoren lineair onafhankelijk?

1. $[0, 1, -9]$, $[1, 1, 1]$, $[1, 2, -3]$;
2. $[-\frac{1}{3}, -2]$, $[2, 12]$, $[1, 7]$;
3. $[0, 1, 1]$, $[1, 1, 2]$, $[-1, 4, -6]$;
4. $[9, 10, 1]$, $[2, 3, 1]$, $[1, 3, 2]$;
5. $[9, 5, 1]$, $[2, 1, 3]$, $[-4, -2, -6]$;
6. $[-4, 2, -1]$, $[1, -0.5, 0.25]$, $[-2, 1, -0.5]$, $[8, -4, 2]$;
7. $[-5, -15, -30]$, $[\frac{1}{3}, 1, 2]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3]$, $[-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}]$;
8. $[1, 3, -2, 5]$, $[2, 4, 3, -3]$, $[-1, 1, -12, 8]$, $[1, -2, 3, 0]$;
9. $[1, -1, 0, 2]$ en $[1, 2, 0, -1]$, $[1, -1, 0, 2]$, $[1, 4, 5, -3]$;

4 Maak gebruik van het product van matrices om de lineaire combinatie(s) met scalairen -5, -12 en 28 op te schrijven en uit te rekenen

1. van de getallen van de vectoren $[5, 7, 9]$, $[3, -8, 13]$, $[-2, -1, 3]$ en $[1, 1, 1]$;
2. van de vectoren $[1, 2]$, $[-5, 4]$ en $[7, 9]$

5 Maak gebruik van het product van matrices om zelf drie verschillende combinaties op te schrijven en uit te rekenen van de getallen van de vectoren $[-4, -3, -2, -1]$ en $[1, 2, 3, 4]$.

6 Maak gebruik van het product van matrices om zelf vier verschillende combinaties op te schrijven en uit te rekenen van de vectoren $[9, 8, 7]$ en $[6, 5, 4]$.

7 Maak gebruik van het product van matrices om het volgend stelsel in een matrixgedaante te brengen. Los daarna het stelsel op.

$$\begin{cases} 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = \dfrac{1}{2} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1.4 Deelruimten

1.4.1 Definitie

De structuur $\mathbb{R}, W, +$ is **een deelruimte** van $\mathbb{R}, V, +$ als en slechts als W een deelverzameling is van V en de structuur $\mathbb{R}, W, +$ een reële vectorruimte is.

Om te bewijzen dat een stuctuur een deelruimte is van een vectorruimte gaan we gebruik maken van de volgende stelling.

1.4.2 Eigenschap

STELLING 1.2 $\mathbb{R}, W, +$ *is* **een deelruimte** *van* $\mathbb{R}, V, +$ *als en slechts als* W *een niet-ledige deelverzameling is van* V *en elk lineaire combinatie van twee vectoren van* W *weer een vector is van* W*.*

Met symbolen:

$$\mathbb{R}, W, + \prec \mathbb{R}, V, + \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} 1. & W \subset V \wedge W \neq \emptyset \\ 2. & \forall r, s \in \mathbb{R} \wedge \forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in W : r\vec{w_1} + s\vec{w_2} \in W \end{cases}$$

*Bewijs**: Het bewijs bestaat uit twee delen. Het eerste deel is onmiddellijk duidelijk want als $\mathbb{R}, W, +$ een deelruimte is van $\mathbb{R}, V, +$ dan is W een niet-ledige deelverzameling van V en is W gesloten voor de optelling en de scalaire vermenigvuldiging.
In het tweede deel van het bewijs tonen we aan dat als de twee voorwaarden voor W vervuld zijn de structuur $\mathbb{R}, W, +$ een deelruimte is van $\mathbb{R}, V, +$.

1. $W \subset V$. Dit volgt uit de eerste voorwaarde.

2. $\mathbb{R}, W, +$ is een reële vectorruimte. Alle eigenschappen van associativiteit, distributiviteit en commutativiteit zijn geldig in V dus ook geldig in W. De interne eigenschappen voor de optelling en de scalaire vermenigvuldiging volgen uit de tweede voorwaarde. We moeten nu nog enkel aantonen dat het neutraal element voor de optelling in W zit alsook het tegengesteld element van elk element van W.

   a. Omdat $W \neq \emptyset$ bestaat er een vector $\vec{w} \in W$. Volgens de tweede voorwaarde is $0.\vec{w} = \vec{0} \in W$. Het neutraal element voor de optelling in V zit dus ook in W.

   b. Nemen we een willekeurige vector $\vec{w} \in W$ dan geldt volgens de tweede voorwaarde dat $(-1).\vec{w} = -\vec{w} \in W$. De tegengestelde vector van elke vector van W is een vector van W.

Voorbeeld:* De verzameling van alle drietallen waarvan de som van de eerste twee elementen gelijk is aan het derde element vormt een deelruimte van de reële vectorruimte van de drietallen.

$$W = \{(x, y, z) : x + y = z \text{ met } x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. $W \neq \emptyset$ want bijvoorbeeld het drietal $(0, 0, 0)$ voldoet aan de voorwaarde $x + y = z$ en behoort dus tot W.

2. We beschouwen twee willekeurige drietallen (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2) van W dan geldt
$$\begin{cases} x_1 + y_1 &= z_1 \\ x_2 + y_2 &= z_2 \end{cases}$$
We zullen nu aantonen dat elke lineaire combinatie van de drietallen (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2) weer een drietal is van W.
$$\begin{aligned} \forall r, s \in \mathbb{R} : \qquad & r(x_1, y_1, z_1) + s(x_2, y_2, z_2) \\ & = (rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2, rz_1 + sz_2) \end{aligned}$$
Opdat dit drietal een element zou zijn van W moet de som van de eerste twee elementen van het drietal gelijk zijn aan het derde element.
$$\begin{aligned} rx_1 + sx_2 + ry_1 + sy_2 &= rx_1 + ry_1 + sx_2 + sy_2 \\ &= r(x_1 + y_1) + s(x_2 + y_2) \\ &= rz_1 + sz_2 \end{aligned}$$

□

1.4.3 Voortbrengende verzamelingen van vectoren

STELLING 1.3 *De verzameling van alle lineaire combinaties van een eindig aantal vectoren van een reële vectorruimte vormt een deelruimte van die vectorruimte.*

Bewijs:*

We noemen C de verzameling van alle lineaire combinaties van de vectoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$ van de reële vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$:
$$C = \{r_1.\vec{v_1} + r_2.\vec{v_2} + \cdots + r_m.\vec{v_m} : r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \wedge \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m} \in V\}$$

1. C is een niet-ledige deelverzameling van V omdat C een verzameling is van vectoren van V.

2. Elke lineaire combinatie van elke twee vectoren van C is weer een vector van C. Inderdaad, nemen we twee willekeurige vectoren $\vec{w_1}$ en $\vec{w_2}$ van C dan zijn beide vectoren lineaire combinaties van $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$.
$$\vec{w_1} \in C \Longrightarrow \exists r_1, r_2, \ldots, r_m : \vec{w_1} = r_1.\vec{v_1} + r_2.\vec{v_2} + \cdots + r_m.\vec{v_m} \tag{1.2}$$
$$\vec{w_2} \in C \Longrightarrow \exists s_1, s_2, \ldots, s_m : \vec{w_2} = s_1.\vec{v_1} + s_2.\vec{v_2} + \cdots + s_m.\vec{v_m} \tag{1.3}$$

Uit de formules 1.2 en 1.3 volgt:

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, \exists r_1, r_2, \ldots, r_m, s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}:$$

$$r.\vec{w_1} + s.\vec{w_2} = r.(r_1.\vec{v_1} + r_2.\vec{v_2} + \cdots + r_m.\vec{v_m}) + s.(s_1.\vec{v_1} + s_2.\vec{v_2} + \cdots + s_m.\vec{v_m})$$

$$\Updownarrow$$

$$r.\vec{w_1} + s.\vec{w_2} = (rr_1 + ss_1).\vec{v_1} + (rr_2 + ss_2).\vec{v_2} + \cdots + (rr_m + ss_m).\vec{v_m}.$$

$$\exists t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R} : r.\vec{w_1} + s.\vec{w_2} = t_1.\vec{v_1} + t_2.\vec{v_2} + \cdots + t_m.\vec{v_m}. \tag{1.4}$$

Dit laatste steunt op de commutativiteit en de associativiteit van de som van vectoren en op de gemengde associativiteit en de twee distributiviteiten van de scalaire vermenigvuldiging in de vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$. Uit formule 1.4 volgt dat de vector $r.\vec{w_1} + s.\vec{w_2}$ een lineaire combinatie is van de vectoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$ en aldus behoort tot C.

$\square$

OPMERKING: De vectoren $\vec{v_i}$ met $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$ zijn zelf ook vectoren van C. Daartoe kiezen we de scalair van $\vec{v_i}$ gelijk aan 1 en de scalairen van de andere vectoren gelijk aan 0.

De vectorruimte $\mathbb{R}, C, +$ van alle lineaire combinaties van de m vectoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$ noemen we de **vectorruimte voortgebracht door de m vectoren** $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}$.

De verzameling $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ is een **voortbrengende verzameling vectoren van de vectorruimte** $R, C, +$.

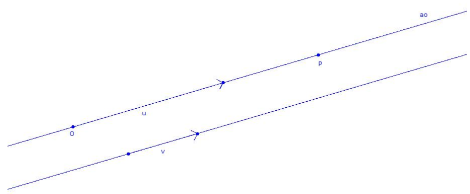
Met symbolen:

$$\mathbb{R}, C, + = \text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$$

1.4.4 Niet-triviale deelruimten van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$

Triviale deelruimten van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ zijn de nulruimte $\mathbb{R}, \{o\}, +$ en de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ zelf.

1.4.4.1 Vectorrechten



Is $\vec{u} \neq \vec{o}$ dan wordt door $\vec{u}$ een rechte door de oorsprong voortgebracht

$$a_O = \text{span}\{\vec{u} \text{ met } \vec{u} \neq \vec{o}\}$$

$$a_O = \{P \in \mathbf{E}_O : \vec{OP} = r.\vec{u} \text{ met } r \in \mathbb{R}\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall P \in a_O, \exists r \in \mathbb{R} : \vec{OP} = r\vec{u}.$$

Beschouwen we een vector $\vec{v} = \vec{OP}$ evenwijdig met a_O dan is $P \in a_O$.

Omgekeerd, is $P \in a_O$ dan is $\vec{OP}$ evenwijdig met a_O.

De vectoren $\vec{v}$ en $\vec{u}$ zijn lineair afhankelijke vectoren.

Twee en meer vectoren parallel met eenzelfde rechte zijn steeds lineair afhankelijk.

a_O wordt voortgebacht door $\vec{u}$ maar ook door een eindig aantal vectoren parallel met $\vec{u}$ waarvan er minstens één verschillend is van de nulvector. Deze vectoren vormen dan een voortbrengende verzameling vectoren voor a_O. De verzameling $\{\vec{u}\}$ is een **minimaal voortbrengende verzameling** voor a_O.

We noemen $\{\vec{u}\}$ een **basis** voor de vectorrechte a_O. De basis bestaat uit één vector. Daarom zeggen we dat de **dimensie** van a_O gelijk is aan één en wordt a_O een **vectorrechte** genoemd.

We zeggen dat de vergelijking $\boxed{a_O : \vec{OP} = r.\vec{u}}$ een **vectoriële vergelijking** is van de vectorrechte a_O.

Voorbeeld van een eendimensionale deelruimte van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$*:*
In de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$ brengen de koppels $(3, \frac{1}{5})$, $(5, \frac{1}{3})$ en $(-2, -\frac{2}{15})$ een eendimensionale deelruimte a_o voort, vermits één vector verschillend is van de nulvector en de twee andere vectoren veelvouden zijn van die vector.

$$a_o = \text{span}\{(3, \frac{1}{5}), (5, \frac{1}{3}), (-2, -\frac{2}{15})\} = \text{span}\{(3, \frac{1}{5})\}$$

$$a_0 = \{(x, y) : (x, y) = r(3, \frac{1}{5}) \text{ met } r \in \mathbb{R}\}.$$

Deze vectoriële vergelijking van a_o noemen we een parametervoorstelling van a_o.

Bepalen van een basis van een voortbrengende verzameling

Het zou gemakkelijk zijn een minimaal voortbrengende verzameling te kunnen bepalen met een rekentechniek. De techniek moet ons toelaten alle afhankelijke vectoren weg te werken. We willen een onafhankelijke vector behouden.
Hiertoe steunen we op het feit dat elke lineaire combinatie van de drie vectoren weer een vector is van a_0.
Omdat de drie vectoren lineair afhankelijk zijn, bestaat er een lineaire combinatie van de drie vectoren, *met scalairen niet alle nul*, die de nulvector oplevert. (zie 1.5).

$$\exists (r, s, t) \neq (0, 0, 0) : r(3, \frac{1}{5}) + s(5, \frac{1}{3}) + t(-2, -\frac{2}{15}) = (0, 0)$$

We geven zo twee verschillende lineaire combinaties:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -5(3, \frac{1}{5}) + 3(5, \frac{1}{3}) + 0(-2, -\frac{2}{15}) & = & (0, 0) \\ 2(3, \frac{1}{5}) + 0(5, \frac{1}{3}) + 3(-2, -\frac{2}{15}) & = & (0, 0) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

De eerste lineaire combinatie maakt het mogelijk de vector $(5, \frac{1}{3})$ te vervangen door de nulvector en de tweede lineaire combinatie maakt het mogelijk de vector $(-2, -\frac{2}{15})$ te vervangen door de nulvector. Let er op dat de vector die vervangen wordt een scalair heeft verschillend van nul.

Aan het stelsel 1.5 voegen we een lineaire combinatie toe om uit te drukken dat we eerste vector willen behouden.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1(3, \frac{1}{5}) + 0(5, \frac{1}{3}) + 0(-2, -\frac{2}{15}) & = & (3, \frac{1}{5}) \\ -5(3, \frac{1}{5}) + 3(5, \frac{1}{3}) + 0(-2, -\frac{2}{15}) & = & (0, 0) \\ 2(3, \frac{1}{5}) + 0(5, \frac{1}{3}) + 3(-2, -\frac{2}{15}) & = & (0, 0) \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Het stelsel 1.6 kunnen we op een handige manier schematisch voorstellen met behulp van het product van twee matrices. De matrix B bevat de scalairen van de lineaire combinaties van de drie gegeven vectoren en de tweede matrix A bevat de vectoren als rijvectoren. B wordt links vermenigvuldigd met A.

$$\begin{aligned} B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1/5 \\ 5 & \frac{1}{3} \\ -2 & -\frac{2}{15} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 5+0\cdot(-2) & 1\cdot\frac{1}{5}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot(-\frac{2}{15}) \\ -5\cdot 3+3\cdot 5+0\cdot(-2) & -5\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{3}+0\cdot(\frac{2}{15}) \\ 2\cdot 3+0\cdot 5+3\cdot(-2) & 2\cdot\frac{1}{5}+0\cdot\frac{1}{3}+3\cdot(-\frac{2}{15}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We houden dus enkel de eerste vector $(3, \frac{1}{5})$ over, de laatste twee vectoren werden vervangen door de nulvector.
De niet-nulvector $(3, \frac{1}{5})$ vormt een basis voor de eendimensionale deelruimte a_O van $\mathbb{R}^2$ voortgebracht door de drie gegeven vectoren.

Eigenlijk interesseert ons enkel de laatste matrix en niet welke lineaire combinaties we moeten maken om deze matrix te bekomen. Het is eenvoudiger als we de laatste matrix zouden kunnen bekomen zonder de matrix B te kennen. Dit kunnen we verwezenlijken door het toepassen van rijoperaties op A die dezelfde zijn als de combinaties die gemaakt worden om het product $B \cdot A$ uit te voeren. Bij een rijoperatie wordt een rij vervangen door een lineaire combinatie van alle rijen maar de scalair van de vector die we vervangen moet verschillend zijn van nul. En dat was ook bij het uitvoeren van $B \cdot A$ het geval.

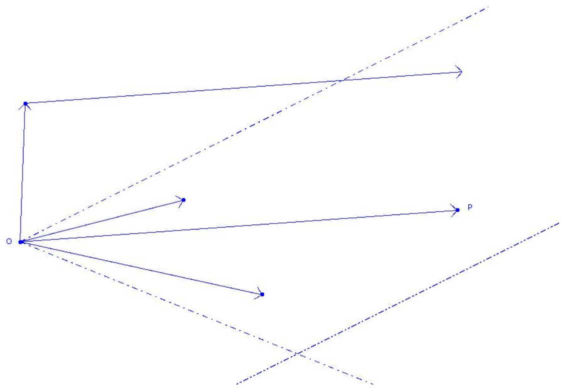
$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{1}{3} \\ -2 & -\frac{2}{15} \end{bmatrix} \overset{\substack{3R_2-5R_1 \\ 3R_3+2R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 3\cdot 5-5\cdot 3 & 3\cdot\frac{1}{3}-5\cdot\frac{1}{5} \\ 3\cdot(-2)+2\cdot 3 & 3\cdot(-\frac{2}{15})+2\cdot\frac{1}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We kunnen als basisvector ook een veelvoud ($\neq 0$) nemen van $(3, \frac{1}{5})$ bvb. $(15, 1)$. Bij een matrix een rij vervangen door een veelvoud verschillend van nul van die rij is tevens een rijoperatie. We kunnen schrijven

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{5R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1/15}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1/15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De laatste matrix is de canonieke matrix van A.

1.4.4.2 Vectorvlakken



Zijn $\vec{u}$ en $\vec{v}$ twee lineair onafhankelijke vectoren dan zijn ze niet evenwijdig met eenzelfde rechte en er geldt

$$r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{o} \Longrightarrow r = s = 0.$$

$\vec{u}$ en $\vec{v}$ brengen een vlak door de oorsprong voort.

$$\alpha_O = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ met } \vec{u} \text{ en } \vec{v} \text{ lineair onafhankelijk.}$$

$$\alpha_O = \{P \in \mathbf{E}_O : \vec{OP} = x.\vec{u} + y\vec{v} \text{ met } x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\Updownarrow$$
$$P \in \alpha_O \Longleftrightarrow \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Beschouwen we een vector $\vec{w} = \vec{OP}$ evenwijdig met α_O dan is $P \in \alpha_O$.

Omgekeerd, is $P \in \alpha_O$ dan is $\vec{OP}$ evenwijdig met α_O.

De vectoren $\vec{w}$, $\vec{u}$ en $\vec{v}$ zijn lineair afhankelijke vectoren.

Drie en meer vectoren parallel met eenzelfde vlak zijn steeds lineair afhankelijk.

α_O is een deelruimte van $\mathbf{E}_O$ voortgebracht door een eindig aantal vectoren waarvan er precies twee $\vec{u}$ en $\vec{v}$ lineair onafhankelijk zijn. Deze verzameling vectoren vormt een voortbrengende verzameling voor α_O.
De verzameling $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ is een minimaal voortbrengende verzameling van α_O.

We noemen $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ een **basis** van het vectorvlak α_O. Het minimum aantal vectoren waardoor een vectorvlak kan voortgebracht worden is 2. Daarom zeggen we dat de **dimensie** van een vectorvlak gelijk is aan 2 en noemen we α_O een **vectorvlak van $\mathbf{E}_O$**.

We zeggen dat de vergelijking $\boxed{\alpha_O : \vec{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}}$ een **vectoriële vergelijking** is van het vectorvlak α_O.

- *Voorbeeld van een tweedimensionale deelruimte van* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$:
  In de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ brengen de drietallen $(1, -1, 0)$, $(2, 0, -3)$ en $(4, -2, -3)$ een tweedimensionale deelruimte voort omdat het drietal $(4, -2, -3)$ een lineaire combinatie is van de lineair onafhankelijke drietallen $(1, -1, 0)$ en $(2, 0, -3)$ ($(1, -1, 0)$ en $(2, 0, -3)$ zijn geen veelvouden van elkaar).

$$\begin{aligned}\alpha_O &= \text{span}\{(1, -1, 0), (2, 0, -3), (4, -2, -3)\} \\ &= \text{span}\{(1, -1, 0), (2, 0, -3)\}\end{aligned}$$

We willen twee onafhankelijke vector behouden.
Hiertoe steunen we op het feit dat elke lineaire combinatie van de drie vectoren weer een vector is van α_0.
Omdat de drie vectoren lineair afhankelijk zijn, bestaat er een lineaire combinatie van de drie vectoren, *met scalairen niet alle nul*, die de nulvector oplevert.

$$\exists (r, s, t) \neq (0, 0, 0) : r(1, -1, 0) + s(2, 0, -3) + t(4, -2, -3) = (0, 0, 0)$$

$$2(1, -1, 0) + (2, 0, -3) - (4, -2, -3) = (0, 0, 0) \tag{1.7}$$

De lineaire combinatie maakt het mogelijk de vector $(4, -2, -3)$ te vervangen door de nulvector. Let er op dat de vector die vervangen wordt een scalair heeft verschillend van nul (we zouden ook $(1, -1, 0)$ of $(2, 0, -3)$ kunnen vervangen).
We voegen twee lineaire combinaties toe aan de gelijkheid 1.7 om uit te drukken dat we de eerste twee vectoren willen behouden. We bekomen het stelsel:

$$\begin{cases} 1(1, -1, 0) + 0(2, 0, -3) + 0(4, -2, -3) &= (1, -1, 0) \\ 0(1, -1, 0) + 1(2, 0, -3) + 0(4, -2, -3) &= (2, 0, -3) \\ 2(1, -1, 0) + (2, 0, -3) - (4, -2, -3) &= (0, 0, 0) \end{cases}$$

In matrixgedaante verkrijgen we:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zoals in het voorgaande voorbeeld kunnen we zonder de matrix B te kennen, door middel van rijoperaties op de matrix A de laatste matrix bekomen.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \overset{-R_3+2R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De vectoren $(1,-1,0)$ en $(2,0,-3)$ vormen een basis van het vectorvlak α_O voortgebracht door de drie drietallen.

Met de methode van Gauss-Jordan kunnen we een basis bekomen van het vectorvlak α_O zonder op voorhand iets te weten over de afhankelijkheid van de gegeven vectoren.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2R_1 + R_2 \\ R_3 - R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De vectoren $(2,0,-3)$ en $(0,2,-3)$ vormen een andere basis van α_O, voortgebracht door de drie gegeven vectoren.

- *Voorbeeld van een tweedimensionale deelruimte van* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$:
  In de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$ brengen de viertallen $(1,2,-1,0)$, $(-2,-4,2,0)$, $(2,4,-3,1)$, en $(1,2,-3,2)$ een tweedimensionale deelruimte voort omdat $(1,2,-1,0)$ en $(-2,-4,2,0)$ veelvouden zijn van elkaar en $(1,2,-3,2)$ een lineaire combinatie is van de onafhankelijke viertallen $(1,2,-1,0)$ en $(2,4,-3,1)$, .

$$\begin{aligned} \alpha_O &= \operatorname{span}\{(1,2,-1,0),(-2,-4,2,0),(2,4,-3,1),(1,2,-3,2)\} \\ &= \operatorname{span}\{(1,2,-1,0),(-2,-4,-3,1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \exists (x_1,x_2,x_3,x_4) \neq (0,0,0,0) : \\ x_1(1,2,-1,0) + x_2(-2,-4,2,0) + x_3(2,4,-3,1) + x_4(1,2,-3,2) = (0,0,0,0) \end{gathered}$$

We geven twee verschillende lineaire combinaties:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2(1,2,-1,0) + (-2,-4,2,0) + 0(2,4,-3,1) + 0(1,2,-3,2) & = & (0,0,0,0) \\ 3(1,2,-1,0) + 0(-2,-4,2,0) - 2(2,4,-3,1) + (1,2,-3,2) & = & (0,0,0,0) \end{array} \right. \tag{1.8}$$

De eerste combinatie laat toe de vector $(-2,-4,2,0)$ te vervangen door de nulvector. De tweede combinatie laat toe de vector $(1,2,-3,2)$ te vervangen door de nulvector. Merk op dat de scalairen van de vectoren die vervangen worden verschillend zijn van nul.

We voegen aan het stelsel 1.8 twee vergelijkingen toe om uit te drukken dat we de eerste en derde vector willen behouden. We bekomen het stelsel:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1(1,2,-1,0) + 0(-2,-4,2,0) + 0(2,4,-3,1) + 0(1,2,-3,2) & = & (1,2,-1,0) \\ 2(1,2,-1,0) + (-2,-4,2,0) + 0(2,4,-3,1) + 0(1,2,-3,2) & = & (0,0,0,0) \\ 0(1,2,-1,0) + 0(-2,-4,2,0) + 1(2,4,-3,1) + 0(1,2,-3,2) & = & (2,4,-3,1) \\ 3(1,2,-1,0) + 0(-2,-4,2,0) - 2(2,4,-3,1) + (1,2,-3,2) & = & (0,0,0,0) \end{array} \right.$$

In matrixgedaante verkrijgen we:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zoals in het voorgaande voorbeeld kunnen we zonder de matrix B te gebruiken, door middel van rijoperaties op de matrix A de laatste matrix bekomen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2+2R_1 \\ R_4-2R_3+3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De vectoren $(1, 2, -1, 0)$ en $(2, 4, -3, 1)$ vormen een basis van het vectorvlak voortgebracht door de vier viertallen.

Zoals in het vorig voorbeeld kunnen we met de methode van Gauss-Jordan een basis bekomen van het vectorvlak zonder op voorhand te weten of de vectoren al dan niet van elkaar afhankelijk zijn.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2 \\ R_4-2R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De vectoren $(1, 2, 0, 1)$ en $(0, 0, -1, 1)$ vormen een andere basis van hetzelfde vectorvlak voortgebracht door de vier viertallen.

1.4.4.3 Besluit

- Bij het toepassen van rijoperaties op een matrix, worden vectoren vervangen door andere vectoren die tot dezelfde deelruimte behoren als voortgebracht door de oorspronkelijke vectoren. De nieuwe vectoren brengen nog steeds dezelfde deelruimte voort.

- Bij het herleiden van een matrix naar zijn canonieke gedaante, worden de rijvectoren die afhankelijk zijn van de andere automatisch vervangen door de nulvector. De overblijvende niet-nulvectoren vormen een verzameling onafhankelijke vectoren die een basis vormen van de deelruimte (minimaal voortbrengende verzameling).
- Elke basis van een deelruimte bezit eenzelfde aantal basisvectoren. De **dimensie van een vectorruimte** is het aantal basisvectoren van die vectorruimte.

1.5 Rang van een matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vdots \\ \vec{v_m} \end{bmatrix}$$

De **rijenrang van een matrix** is de dimensie van de vectorruimte voortgebracht door de rijvectoren van de matrix.

$$\text{Rang}A = \dim \mathit{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_i}, \ldots, \vec{v_m}\} = \dim \mathbb{R}, W, +$$

STELLING 1.4 *Rijequivalente matrices hebben dezelfde rang.*

Bewijs: Rijequivalente matrices hebben dezelfde rang vermits de rijvectoren dezelfde deelruimte voortbrengen. Een rijoperatie verandert immers niets aan de ruimte voortgebracht door de rijvectoren.

Gevolg 1 *Vormen de rijvectoren van een matrix een basis van een r-dimensionale ruimte dan zet elke rijoperatie op die matrix deze basis om in een basis van die r-dimensionale ruimte.*

$\boxed{\text{Bepalen van de rang van een matrix}}$:
Om de rang van een matrix te bepalen gaan we de matrix herleiden naar zijn canonieke gedaante vermits hun rangen gelijk zijn en de rang van een canonieke matrix gemakkelijk te bepalen is. En we krijgen een eenvoudige basis van de deelruimte voortgebracht door de rijvectoren van de matrix cadeau...

De rang van een matrix is gelijk aan het aantal niet-nul rijen van haar canonieke gedaante. Dit is ook gelijk aan het aantal Jordan-elementen.

OPMERKING: Noemen we r de rang van een matrix en zetten we in de canonieke matrix enkel de kolommen met een Jordan-element in een nieuwe matrix dan verkrijgen we een diagonaalmatrix van de orde $r \times r$, waarvan de diagonaalelementen de Jordan-elementen zijn.

Definieer nu zelf op analoge wijze **kolomoperaties** op een matrix, **kolomequivalente matrices** en **kolommenrang van een matrix**..

STELLING 1.5 *Een matrix en zijn getransponeerde hebben dezelfde rang. M.a.w. de rijenrang van een matrix is gelijk aan de kolommenrang.*

GEVOLG 1.1 *De dimensie van de vectorruimte voortgebracht door de rijvectoren is gelijk aan de dimensie van de ruimte voortgebracht door de kolomvectoren.*

OPGAVEN — 8

1. Tot welke vectorruimte behoren de rijvectoren van de volgende matrices?
2. Bepaal de meest eenvoudige basis van de deelruimte.
3. Bepaal ook de dimensie van die deelruimten. Hoe noemen we die deelruimte in geval de rijvectoren tot $\mathbb{R}^3$ of tot $\mathbb{R}^2$ behoren?

a. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ h. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$

i. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ j. $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

9 Bereken het getal a, zodanig dat de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ lineair onafhankelijk zijn.

a. $\vec{u}(1, a-1, 1)$, $\vec{v}(1, a, a-1)$ en $\vec{w}(2, 7, a)$;

b. $\vec{u}(a, a-1, -1)$, $\vec{v}(3, a, 3)$ en $\vec{w}(-1, 1, a)$.

10 *Bespreek de dimensie van de ruimte voortgebracht door de volgende vectoren.*

a. $\vec{u}(a, 2, 1)$ *en* $\vec{v}(1, a+1, a)$*;*

b. $\vec{u}(a, a, 0)$*,* $\vec{v}(2, 3, a)$ *en* $\vec{w}(a, 3, 2)$*.*

c. $\vec{u}(a,1,b)$, $\vec{v}(1,1,ab)$ *en* $\vec{w}(1,a,b)$.

OPLOSSINGEN:
84 a. 2; b. 2; c. 2; d. 1; e. 3; f. 3; g. 1; h. 3; i. 2; j. 1;
85 a. $a \neq 2 \wedge a \neq 4$; b. $a \neq 0 \wedge a \neq 4 \wedge a \neq -1$;
10 a. rang $= 2 \iff a \neq 1$, rang $= 1 \iff a = 1$; b. rang $= 3 \iff a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq 0$, rang $= 2 \iff a = 1 \vee a = 2 \vee a = 0$;

PROEFHERHALINGSTOETS

1. Gegeven de matrix
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 7 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$
   Gevraagd:
   (a) bepaal een zo eenvoudig mogelijke basis van de deelruimte voortgebracht door de kolomvectoren van de gegeven matrix, die vectoren zijn van de vierdimensionale vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$;
   (b) geef de dimensie van die deelruimte.
2. Bespreek de dimensie van de ruimte voortgebracht door de gegeven vectoren. Geef telkens aan welke van de gegeven vectoren als basis kunnen genomen worden voor de voorgebrachte deelruimte. $\vec{u}(1,a,a^2)$, $\vec{v}(1,a,ab)$ en (b,a,a^2b).

Hoofdstuk 2

Lineaire transformaties

2.1 Definities

Een **lineaire transformatie van een reële vectorruimte** is een transformatie van die vectorruimte waarbij het beeld van een lineaire combinatie van vectoren gelijk is aan de lineaire combinatie van de beelden.

Met symbolen:

$$f : \mathbb{R}, V, + \longrightarrow \mathbb{R}, V, + \text{ is een lineaire transformatie}$$

$$\Longleftrightarrow \forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall r, s \in \mathbb{R} : f(r.\vec{v} + s.\vec{w}) = r.f(\vec{v}) + s.f(\vec{w})$$

BELANGRIJKE OPMERKING: Neem $r = 0$ en $s = 0$ dan is $f(\vec{o}) = \vec{o}$.
BIJ EEN LINEAIRE TRANSFORMATIE IS HET BEELD VAN DE NULVECTOR STEEDS DE NULVECTOR

Een **lineaire permutatie van een vectorruimte** is een lineaire transformatie van die vectorruimte die bijectief is. Dit betekent dat elke vector van de vectorruimte het beeld is van juist één vector van de vectorruimte.

De **kern van een lineaire transformatie van** V is de verzameling van vectoren van V die op de nulvector van V worden afgebeeld.

Met symbolen:

$$\text{Ker} f = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{o}\}.$$

Het **beeld van een lineaire transformatie van** V is de verzameling van de beelden van alle elementen van V.

Met symbolen:

$$f(V) = \text{Im} f = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in V\}.$$

Een eigenvector van een lineaire transformatie f is een vector verschillend van de nulvector die door f afgebeeld wordt op een reëel veelvoud van zichzelf. Dit reëel veelvoud wordt de **eigenwaarde behorende bij die eigenvector** genoemd.

Met symbolen:

$$\vec{v} \text{ is een eigenvector van} f \iff \vec{v} \neq \vec{o} \wedge f(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$$

$$\text{met } \lambda \text{ de eigenwaarde behorende bij } \vec{v}$$

OPMERKING: Bevat de kern van een lineaire transformatie niet enkel de nulvector dan heeft de lineaire transformatie de eigenwaarde 0. De kern is dan de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 0.

STELLING 2.1 *Is $\vec{v}$ een eigenvector met eigenwaarde λ dan is elk reëel veelvoud, verschillend van nul, van $\vec{v}$ ook een eigenvector met dezelfde eigenwaarde λ.*

Bewijs: $\vec{v}$ is een eigenvector met eigenwaarde $\lambda \iff f(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$.

$$\forall r \in \mathbb{R} : f(r.\vec{v}) \overset{(f \text{ is lin.})}{=} r.f(\vec{v}) = r.(\lambda.\vec{v})$$

$$\overset{\text{(gem. ass.)}}{=} (r\lambda).\vec{v} \overset{\text{(comm.)}}{=} (\lambda r).\vec{v} \overset{\text{(gem. ass.)}}{=} \lambda(r.\vec{v})$$

Hieruit volgt dat voor elk reëel getal, verschillend van nul, geldt dat $r.\vec{v}$ een eigenvector is met eigenwaarde λ. □

STELLING 2.2 *Twee eigenvectoren $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ behorende bij twee verschillende eigenwaarden resp. λ_1 en λ_2 zijn lineair onafhankelijk.*

Bewijs: Onderstel dat de vectoren lineair afhankelijk zijn dan is de ene een veelvoud van de andere (vermits ze allebei verschillend zijn van de nulvector). Uit voorgaande stelling volgt dan dat ze beide dezelfde eigenwaarde hebben.

LET OP: Het omgekeerde van deze stelling is niet geldig. Twee lineair onafhankelijke eigenvectoren behoren niet noodzakelijk bij twee verschillende eigenwaarden. Bijvoorbeeld, bij een homothetie behoren alle vectoren van de ruimte bij eenzelfde eigenwaarde. □

2.2 Lineaire transformaties van het vlak Π_O

2.2.1 Transformatieformules en geassocieerde matrix

We kiezen een basis $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ in het vectorvlak Π_O. De beelden van deze basisvectoren zijn

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \\ f(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \end{cases}$$

We beschouwen een vector $\vec{v}$ en zijn beeld $f(\vec{v})$:

$$\begin{cases} \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\forall \vec{v} \in \Pi_O : \vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

Omdat f lineair is, geldt

$$\begin{aligned} \forall \vec{v} \in \Pi_O : f(\vec{v}) &= f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) \\ &= xf(\vec{e_1}) + yf(\vec{e_2}) \end{aligned}$$

We vervangen de vectoren door hun coördinaten:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

De lineaire combinaties in het tweede lid kunnen we schrijven als het product van twee matrices en we verkrijgen de matrixgedaante:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

In verkorte matrixgedaante:

$$Y = F \cdot X$$

Dit zijn de de zogenaamde **transformatieformules** die het verband uitdrukken tussen de coördinaat (x, y) van een punt P en de coördinaat (x', y') van zijn beeld P'.

In de matrix

$$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

is de eerste kolomvector het beeld van de eerste basisvector en de tweede kolomvector het beeld van de tweede basisvector.

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

$$F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

De matrix F wordt de **geassocieerde matrix van de lineaire transformatie** genoemd omdat de lineaire transformatie volledig bepaald is door de beelden van een basisvectoren. De matrix geassocieerd aan een lineaire transformatie van het vlak is een vierkante matrix van de orde 2.

1. Zijn de beelden van de basisvectoren twee lineair onafhankelijke vectoren dan is F niet-singulier en dan is $\det F \neq 0$. In dit geval is de transformatie een lineaire permutatie. Hieruit volgt:

   de inverse matrix F^{-1} van de geassocieerde matrix F van f bestaat en is de geassocieerde matrix van de inverse lineaire transformatie f^{-1}.
   de transformatieformules voor f zijn $Y = F \cdot X \Longleftrightarrow X = F^{-1} \cdot Y$
   de transformatieformules voor f^{-1} zijn $Y = F^{-1} \cdot X$

   $$\mathrm{Ker} f = \{\vec{o}\} \text{ en } \mathrm{Im} f = \Pi_O$$

2. Zijn de beelden van de basisvectoren lineair afhankelijk dan is F een singuliere matrix en is $\det F = 0$.

   (a) Als $\mathrm{rang} F = 1$ dan is

   $$\mathrm{Ker} f = a_O \text{ en } \mathrm{Im} f = b_O$$

   (b) Als $\mathrm{rang} F = 0$ dan is

   $$\mathrm{Ker} f = \Pi_O \text{ en } \mathrm{Im} f = \{\vec{o}\}$$

   In dit geval is de matrix F de nulmatrix en wordt f de **nultransformatie** genoemd.

OPGAVEN — 11 Van een lineaire transformatie in Π_O is gegeven dat haar beeldruimte een deelruimte is van haar kern. Bewijs dat de som van de diagonaalelementen van de geassocieerde matrix ten opzichte van een willekeurige basis 0 is.

2.2.2 Lineaire transformaties van het affien vlak

Bij de studie van de reële functies hebben we gezien hoe we de grafieken kunnen transformeren door verschuivingen, spiegelingen om rechten, puntspiegelingen, homothetiën en uitrekkingen (inkrimpingen) uit te voeren. We onderzochten tevens de invloed daarvan op het voorschrift van een functie. Voor lineaire transformaties geldt de eigenschap dat het beeld van de nulvector steeds de nulvector is. Zo zal een verschuiving over een vector die niet de nulvector is geen lineaire transformatie zijn. Spiegelingen om vectorrechten, de puntspiegeling om O, de homothetiën met centrum O, de uitrekkingen (inkrimpingen) met centrum O en de parallelprojecties op een vectorrechte zijn voorbeelden van lineaire transformaties van het vlak.

2.2.2.1 Spiegelingen

Bij een spiegeling om een vectorrechte is het beeld van een basis een stel lineair onafhankelijke vectoren. De *geassocieerde matrix is bij een spiegeling steeds niet singulier*. Daaruit volgt dat voor elke spiegeling geldt:

> de spiegeling om een vectorrechte is een lineaire permutatie.
>
> $$\mathrm{Ker} f = \{\vec{o}\}$$
> $$\mathrm{Im} f = \Pi_O$$
>
> de inverse transformatie van de spiegeling is de spiegeling zelf. De matrix van een spiegeling is gelijk aan zijn inverse matrix.
>
> *De spiegelas is de eigenruimte met eigenwaarde 1*
> *De vectorrechte van de spiegelrichting is de eigenruimte met eigenwaarde* -1.

Voorbeelden:

- Spiegeling om de y-as volgens de richting van de x-as.
  - $\boxed{\text{Eigenwaarden en eigenvectoren}}$
    - De vectoren van de x-as worden afgebeeld op hun tegengestelde vector. Bijgevolg zijn de vectoren van de x-as eigenvectoren met eigenwaarde -1.
    - De vectoren van de y-as worden afgebeeld op zichzelf. Bijgevolg zijn de vectoren van de y-as eigenvectoren met eigenwaarde 1.

Figuur 2.1: spiegeling om de y-as

– Transformatieformules

Van de analyse kennen we de spiegeling om de y-as volgens de richting van de x-as.
De transformatieformules zijn

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -x + 0y \\ y' = 0x + y \end{cases}$$

De transformatieformules in matrixgedaante:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

De geassocieerde matrix van deze spiegeling is $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

De beelden van de basisvectoren:

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

– De inverse transformatie

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

De inverse matrix is

$$F^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = F$$

De matrix van de spiegeling is dus gelijk aan zijn inverse.

– Beeld van een figuur

Bepaal het beeld van de rechte $2x - 3y = 6$ onder een spiegeling om de y-as volgens de richting van de x-as.

We passen de transformatieformules toe op de vergelijking:

$$2(-x') - 3y = 6$$

Het beeld is de rechte met vergelijking

$$-2x - 3y = 6$$

Figuur 2.2: beeld van de rechte $2x - 3y = 6$

OPGAVEN — **12** Bestudeer op analoge wijze de spiegeling om de x-as volgens de richting van de y-as.

13 Bepaal de vergelijking van het beeld van de parabool $y = 0,5(3x - 2)(4x + 9)$ onder een spiegeling om de x-as volgens de richting van de y-as.

- Spiegeling om de rechte $y = x$ volgens de richting van de rechte $y = -x$.

Figuur 2.3: spiegeling om de rechte $x = y$ volgens de richting van $y = -x$

- $\boxed{\text{Eigenwaarden en eigenvectoren}}$
  * De vectoren van de rechte $y = -x$ worden afgebeeld op hun tegengestelde vector. Bijgevolg zijn de vectoren van deze rechte eigenvectoren met eigenwaarde -1.
  * De vectoren van de $y = x$ worden afgebeeld op zichzelf. Bijgevolg zijn de vectoren van deze rechte eigenvectoren met eigenwaarde 1.
- $\boxed{\text{Transformatieformules}}$
  Van de analyse kennen we deze spiegeling.
  De transformatieformules zijn

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x' = 0x + y \\ y' = x + 0y \end{array}\right.$$

De transformatieformules in matrixgedaante:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

De geassocieerde matrix van deze spiegeling is $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

De beelden van de basisvectoren:

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\boxed{\text{De inverse transformatie}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

  Toon zelf aan dat de matrix van deze spiegeling de inverse is van zichzelf.

- $\boxed{\text{Beeld van een figuur}}$
  Bepaal de vergelijking van het beeld van de parabool $y = (2x-1)(x+5)$ onder de spiegeling om de rechte $y = x$ volgens de richting van de rechte $y = -x$.
  We passen de transformatieformules toe op de vergelijking:

$$x' = (2y' - 1)(y' + 5)$$

  Het beeld is de parabool met vergelijking

$$2y^2 + 9y - x - 5 = 0$$

OPGAVEN — **14** Bepaal de vergelijking van het beeld van de hyperbool $y = \frac{1}{x}$ onder de spiegeling om de rechte $y = x$ volgens de richting van de rechte $y = -x$. Wat merk je op?

15 Bepaal de vergelijking van het beeld van de parabool $y = 0,5x^2 - x + 1,5$ onder een spiegeling om de $y = x$ volgens de richting van de $y = -x$.

- Spiegeling om de rechte $y = 2x$ volgens de richting van de rechte $y = -3x$

  - $\boxed{\text{Transformatieformules}}$
    Hier kennen we de transformatieformules niet. We kennen echter wel de beelden van twee lineair onafhankelijke vectoren, nl. van de eigenvectoren van deze spiegeling. Bij deze spiegeling is de rechte $y = 2x$ de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 1 en $y = -3x$ de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde -1.
    Noemen we F de geassocieerde matrix van deze spiegeling dan geldt voor de beelden van de twee lineair onafhankelijke eigenvectoren $(1,2)$ en $(1,-3)$ (want ze behoren bij 2 verschillende eigenwaarden):

$$F \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

    en

$$F \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

De twee voorgaande matriciële betrekkingen kunnen samengevat worden in één matriciële betrekking.

$$F \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Deze laatste betrekking is een matriciële vergelijking in F. We kunnen F hieruit oplossen door beide leden rechts te vermenigvuldigen met de inverse matrix van $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. De inverse matrix bestaat omdat de kolomvectoren de twee lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn. De matrix is bijgevolg niet-singulier met determinant gelijk aan -5.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

De matrix van deze spiegeling is een niet-singuliere matrix met determinant -1 en is de inverse van zichzelf. Ter controle maken we nog even de berekening.

$$F^{-1} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

– Beeld van een figuur

Stel dat we werken t.o.v. een orthonormale basis dan kunnen we een cirkel beschouwen en daarvan het beeld bepalen onder deze affiene spiegeling. We nemen de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
De transformatieformules zijn:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

We lossen de vergelijking op naar $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

In de vergelijking van de cirkel vervangen we x door $\frac{1}{5}x'+\frac{2}{5}y'$ en y door $\frac{12}{5}x'-\frac{1}{5}y'$. We krijgen

$$\frac{1}{25}(x' + 2y')^2 + \frac{1}{25}(12x' - y')^2 = 1 \Longleftrightarrow 145(x')^2 - 20x'y' + 5(y')^2 - 25 = 0.$$

De vergelijking van het beeld van de cirkel is $145x^2 - 20xy + 5y^2 - 25 = 0$. Deze vergelijking stelt een ellips voor. Bij een loodrechte spiegeling is het beeld van een cirkel steeds een cirkel.

2.2.2.2 Uitrekkingen-inkrimpingen

Uitrekking (inkrimping) langs de x-as met factor r is een lineaire permutatie als $r \neq 0$. De inverse transformatie is de inkrimping (uitrekking) met factor $\frac{1}{r}$ langs de x-as.

Figuur 2.4: uitrekking met factor 2,5 — inkrimping met factor 2,5

- $\boxed{\text{Transformatieformules}}$
  x-as is eigenruimte met eigenwaarde r en y-as is eigenruimte met eigenwaarde 1. De transformatieformules zijn:
  $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- $\boxed{\text{Inverse transformatie}}$
  $$\begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0$$
  De inverse matrix is
  $$F^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = F$$
  Dit is de geassocieerde matrix van een inkrimping (uitrekking) langs de x-as met factor $\frac{1}{r}$.

OPGAVEN — **16** Bepaal de inverse transformatie van de uitrekking met factor 5 in de richting van de x-as.

17 Bepaal het beeld van de hyperbool $y = \frac{1}{x}$ onder een inkrimping met factor 4 in de richting van de x-as;

18 Stel de transformatieformules op voor een uitrekking met factor $-\frac{7}{3}$ in de richting van de y-as. Bepaal vervolgens het beeld van de parabool $y = 4 - x^2$.

2.2.2.3 Homothetie met centrum O en factor r

Een homothetie met centrum O en factor r is een lineaire permutatie als $r \neq 0$.

Alle vectoren van het vlak zijn eigenvectoren met eigenwaarde r.

De inverse transformatie van een lineaire homothetie met factor r is een lineaire homothetie met factor $\frac{1}{r}$.

Figuur 2.5: lineaire homothetie met factor $-\frac{4}{3}$

- Transformatieformules

  De basisvectoren zijn tevens eigenvectoren met eigenwaarde r. De transformatieformules zijn:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

- De inverse transformatie

$$\begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} = r^2 \neq 0$$

  De inverse matrix is

$$F^{-1} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} = F$$

  Dit is de geassocieerde matrix van een lineaire homothetie met factor $\frac{1}{r}$.

- Bijzondere homothetiën

- Is $r = 1$ dan is de lineaire homothetie de **identieke transformatie**. Elke vector wordt op zichzelf afgebeeld. Alle vectoren van het vlak zijn eigenvectoren met eigenwaarde gelijk aan 1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- Is $r = -1$ dan is de homothetie een **spiegeling om de oorsprong** O

Figuur 2.6: spiegeling om O

Elke vector wordt op zijn tegengestelde afgebeeld. Alle vectoren van het vlak zijn eigenvectoren met eigenwaarde gelijk aan -1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- Is $r = 0$ dan is de lineaire homothetie de **nultransformatie**. Elke vector wordt op de nulvector afgebeeld. Alle vectoren van het vlak zijn eigenvectoren met eigenwaarde gelijk aan 0.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

OPGAVEN — 19 Bepaal de homothetie die de parabool met vergelijking $y = ax^2$ afbeeldt op de parabool met vergelijking $y = bx^2$ (Parabolen zijn gelijkvormige krommen).

2.2.2.4 Parallelprojecties

Een parallelprojectie op een vectorrechte beeldt een basis af op een stel afhankelijke vectoren. De parallelprojectie is geen lineaire permutatie. De rang van de geassocieerde matrix is 1. Hieruit volgt:

$$\text{Ker} f = a_O$$
$$\text{Im} f = b_O$$

De projectieas is b_O en is de eigenruimte met eigenwaarde 1.

De vectorrechte van de projectierichting is a_O en is de eigenruimte met eigenwaarde 0.

Voorbeelden:

- De parallelprojectie op de x-as volgens de richting van de y-as.

Figuur 2.7: parallelprojectie op de x-as volgens de y-as

– $\boxed{\text{Transformatieformules}}$ Het beeld van $(1, 0)$ is $(1, 0)$ en het beeld van $(0, 1)$ is $(0, 0)$.
De transformatieformules zijn:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Controleer dat de determinant van F gelijk is aan nul.

– Vectoren die afgebeeld worden op dezelfde vector
Oneindig veel vectoren worden afgebeeld op $(x_1, 0) \in \text{Im}f$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dit stelsel kan niet opgelost worden met de inverse matrix want het is geen stelsel van Cramer. Het stelsel is oplosbaar met rang gelijk aan 1 en herleidt zich dus tot één vergelijking, nl. $x = x_1$. Alle de plaatsvectoren van de punten van de rechte $x = x_1$ worden op $(x_0, 0)$ afgebeeld. Dit is een rechte evenwijdig met de y-as (de kern van f).

- Parallelprojectie op $y = -4x$ volgens de richting van $y = \frac{1}{2}x$

Figuur 2.8: parallelprojectie op de $y = -4x$-as volgens de $y = \frac{1}{2}x$

– Transformatieformules De vectorrechte $y = -4x$ is eigenruimte met eigenwaarde 1 (Imf) en de vectorrechte $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x - 2y = 0$ is eigenruimte met eigenwaarde 0 (Ker$f$). Het beeld van twee lineair onafhankelijke vectoren eigenvectoren $(1, -4)$ en $(2, 1)$:

$$F \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Reken zelf na dat de geassocieerde matrix gelijk is aan

$$F = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

– $\boxed{\text{De vectoren die afgebeeld worden op dezelfde vector}}$
De vectoren die afgebeeld worden op $(1, -4) \in \mathrm{Im}f$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel is oplosbaar omdat de twee vergelijkingen evenredig zijn. Het herleidt zich tot een stelsel met één vergelijking nl. $\frac{x}{9} - \frac{2x}{9}y = 1 \Leftrightarrow x - 2y = 9$.
De vectoren die op $(1, -4)$ worden afgebeeld, liggen op de rechte $x - 2y = 9$.
Dit is de rechte door $(1, -4)$ evenwijdig met de kern van f, nl. $x - 2y = 0$.

- Bepalen van projectieas en projectierichting
Toon aan dat de matrix F de geassocieerde matrix is van een parallelprojectie en bepaal de projectieas en de projectierichting.

$$F = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Elk beeld is een lineaire combinatie van de beelden van de basisvectoren.

$$f(\vec{v}) = r\begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De beeldverzameling is de vectorrechte

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} \Longleftrightarrow y = 2x$$

We moeten nu nog nagaan of elke vector van deze rechte afgebeeld wordt op zichzelf.

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ 2k \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7k \\ 14k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 2k \end{bmatrix}$$

De rechte $y = 2x$ is dus de projectierechte.

De $\mathrm{ker}f$ is de oplossingenverzameling van het stelsel

$$F = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel herleidt zich tot één vergelijking. De oplossingen zijn de vectoren van de rechte

$$\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y = 0 \Longleftrightarrow 3x + 2y = 0$$

De rechte $3x + 2y = 0$ bepaalt de projectierichting.

OPGAVEN — 20 Gegeven: een lineaire transformatie f van het vlak Π_O met matrix F.

(i) Bepaal het beeld van het punt $P(0,6)$;

(ii) Bepaal de plaatsvectoren van het (de) punt(en) waarvoor $Q(-2,-\sqrt{2})$ het beeld is.

(ii) Bepaal Ker$f$ en Imf, alsook hun dimensies.

(iii) Bepaal het beeld van de rechte $2x - y + 5 = 0$

a. $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $F = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$

21 Bepaal de matrix van de lineaire projectie van Π_O op de rechte $a : x + 2y = 0$ volgens de richting van de rechte $b : x - y = 0$.

22 Bepaal de matrix van de lineaire transformatie die de punten $P(2,1)$ en $Q(1,3)$ afbeelden op resp. $P'(3,-1)$ en $Q'(-1,2)$.

23 Bepaal de matrix van de lineaire transformatie die de punten $P(2,3)$ en $Q(-2,1)$ afbeelden op resp. $P'(2,0)$ en $Q'(-3,0)$.

OPLOSSINGEN:

20 a. $f(P) = (18,12)$; $f^{-1}(P) = (\frac{-4+3\sqrt{2}}{5}, -\frac{2+\sqrt{2}}{5})$; Ker$f = \vec{o}$, Im$f = \Pi_O$; $3x - 7y + 25 = 0$

b. $f(P) = (6\sqrt{3}, 3\sqrt{6})$; de plaatsvectoren van de punten van de rechte $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = -2$; Ker$f$: $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, Im$f : x - \sqrt{2}y = 0$; $x - \sqrt{2}y = 0$.

21 $F = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$;

22 $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

22 $F = \begin{bmatrix} 11/8 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.2.3 Lineaire transformaties van het euclidisch vlak

2.2.3.1 Orthogonale lineaire transformaties

Een **orthogonale lineaire transformatie van het euclidisch vlak** is een lineaire transformatie van de euclidische vlak die het scalair product van twee vectoren onveranderd laat. Een orthogonale lineaire transformatie behoudt dus de loodrechte stand en de afstand.

Figuur 2.9: orthogonale lineaire transformaties

In het euclidisch vectorvlak Π_O beschouwen we een orthonormale basis $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

De basisvectoren en hun beelden voor een orthogonale lineaire transformatie zijn de plaatsvectoren van punten op de goniometrische cirkel. Hun coördinaten kunnen dus uitgedrukt worden in termen van goniometrische getallen.

Stel $(a_{11}, a_{12}) = (\cos\theta, \sin\theta)$ dan hebben we twee mogelijkheden voor (a_{21}, a_{22}) nl. $(-\sin\theta, \cos\theta)$ en $(\sin\theta, -\cos\theta)$ (zie fig.2.9)

1. De orthogonale lineaire transformatie met matrix $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ noemen we de **rotatie om** O over de hoek θ. De determinant van de geassocieerde matrix van een rotatie om O is gelijk aan 1.
   Een rotatie die niet de identieke transformatie is heeft geen eigenwaarden en geen eigenvectoren.

   Voorbeeld: Rotatie om de oorsprong over een hoek $\theta = 45^o$.
   De transformatieformules:
   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. De orthogonale lineaire transformatie met matrix $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ noemen we de **loodrechte spiegeling om de vectorrechte** die een hoek $\frac{\theta}{2}$ insluit met de positieve x-as. De determinant van de geassocieerde matrix van een spiegeling om een vectorrechte is gelijk aan -1.

   Voorbeeld: Loodrechte spiegeling om de vectorrechte $y = 2x$.
   De spiegelas $y = 2x$ is eigenruimte met eigenwaarde 1.
   De loodlijn $2y = -x$ op de spiegelas is eigenruimte met eigenwaarde -1.

$$F \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   We lossen deze vergelijking op naar F:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

   De transformatieformules zijn

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.2.3.2 Loodrechte projecties

We stellen de transformatieformules op voor de loodrechte projectie op een vectorrechte waarvan de hoek θ die ze insluit met de positieve x-as gegeven is.
Bewijs dat de volgende formules de transformatieformules zijn.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Bewijs:

- $\mathrm{Ker} f =$

- $f(\Pi_O) =$

- eigenwaarden en bijbehorende eigenruimte:
  -
  -
- Het beeld van twee lineair onafhankelijke vectoren:

$$F\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- $F =$
- $\det F =$ en F is en f is

Voorbeelden:

Figuur 2.10: loodrechte projectie op $y + \sqrt{3}x = 0$

- We beschouwen de loodrechte projectie op de rechte $y + \sqrt{3}x = 0$.
  Er geldt: $\tan\theta = -\sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$
  Hieruit volgt dat

$$\sin(\theta) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

en

$$\cos(\theta) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

De transformatieformules zijn

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

We bepalen de verzameling van de vectoren die op de vector $(\sqrt{3}, -3)$ worden afgebeeld.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Deze matriciële vergelijking stelt een lineair stelsel $(2, 2)$ voor met rang 1.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y & = & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y & = & -3 \end{cases} \iff -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y = -3$$

De vectoren die afgebeeld worden op $(\sqrt{3}, -3)$ zijn de plaatsvectoren van de punten van de rechte $\sqrt{3}x - 3y = 12$. Dit is een rechte loodrecht op de rechte $\sqrt{3}x + y = 0$ waarop geprojecteerd wordt en is dus evenwijdig met de kern van f.

- We beschouwen de loodrechte projectie op de rechte $5x + 7y = 0$.

Figuur 2.11: loodrechte projectie op $5x + 7y = 0$

  - Ker$f$ =

  - $f(\Pi_O) =$

  - eigenwaarden en bijbehorende eigenruimte:
    - *
    - *
  - Het beeld van twee lineair onafhankelijke vectoren:

$$F \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

  - $F =$

  - det$F$ = en F is en f is

OPGAVEN — **24** Bepaal naar keuze een lineaire loodrechte projectie. Beschouw een vector van Imf en zoek de verzameling van alle vectoren die op deze vector worden afgebeeld.

OPGAVEN — 25 Gegeven zijn twee lineair onafhankelijke vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in het vlak Π_O. Zij $\vec{p}$ een onbekende vector, waarvoor we weten dat de lineaire transformatie die $\vec{a}$ op $\vec{b}$ en $\vec{p}$ op $\vec{p}+\vec{a}$ afbeeldt niet bijectief is. Bepaal alle mogelijke vectoren $\vec{p}$.

26 Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{bmatrix} a-1 & a \\ a^2-1 & a^2-a \end{bmatrix}$$

een bijectie?

OPLOSSINGEN:

25 de punten liggen op de rechte door punt met plaatsvector $-\vec{a}$ parallel met $\vec{b}$;
26 $a \neq 1 \wedge a \neq 0$.

2.2.4 Opsporen van eigenvectoren van een (2×2)-matrix

Een vector $\vec{v}(X)$ is eigenvector als en slechts als hij verschillend is van de nulvector en als er een reële waarde λ bestaat waarvoor geldt:

$$F \cdot X = \lambda.X$$

Om $X \neq O$ te bepalen lossen we deze matriciële vergelijking op naar X.

$$F.X - \lambda.X = O \Longleftrightarrow F.X - (\lambda.I_n).X = 0 \Longleftrightarrow (F - \lambda.I_n).X = O$$

Deze laatste vergelijking is de matrixgedaante van een homogeen lineair $(2,2)$-stelsel met parameter λ.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a_{11}-\lambda)x + a_{21}y &=& 0 \\ a_{12}x + (a_{22}-\lambda)y &=& 0 \end{array}\right.$$

De coëfficiëntenmatrix van het stelsel is

$$F_\lambda = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{array}{rcl} \det F_\lambda = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} &=& \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &=& \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det F \end{array}$$

De oplosbaarheid van het stelsel hangt af van de waarde van de parameter λ.

1. $\text{Rang}F_\lambda = 2 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det F \neq 0$
   In dit geval is het homogeen stelsel een stelsel van Cramer. Het stelsel heeft enkel de nuloplossing. Het stelsel heeft voor deze waarden van λ geen eigenvectoren.

2. $\text{Rang}F_\lambda \langle 2 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det F = 0$
   Heeft de kwadratische vergelijking in λ oplossingen dan heeft het homogeen stelsel voor deze λ-waarden minstens 1 vrije onbekende. Er zijn ∞ veel oplossingen dus ∞ veel eigenvectoren.

   Deze kwadratische vergelijking in λ wordt de **karakteristieke vergelijking** genoemd. Elke oplossing van de karakteristieke vergelijking is een eigenwaarde van F. Er geldt

   $$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \text{ en } \lambda_1\lambda_2 = \det F$$

   De eigenvectoren behorende bij een eigenwaarde λ worden opgeleverd door de oplossingen van het stelsel:

   $$\left\{\begin{array}{rcl} (a_{11}-\lambda)x + a_{21}y &=& 0 \\ a_{12}x + (a_{22}-\lambda)y &=& 0 \end{array}\right.$$

BESPREKING:

(a) Is Rang$F_\lambda = 0$ dan is

$$F_\lambda = F - \lambda.I_n = O \Longleftrightarrow F = \lambda.I_n$$

Hieruit volgt dat F een scalaire matrix is, die de geassocieerde matrix is van een lineaire homothetie met factor λ. De homothetie heeft één eigenwaarde en het vectorvlak Π_O is de bijbehorende eigenruimte.

(b) Is één van de eigenwaarden gelijk aan een diagonaalelement dan is de andere eigenwaarde gelijk aan het ander diagonaalelement.
Inderdaad, stel $\lambda_1 = a_{11}$. We beschouwen de som van de eigenwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \\ \lambda_1 = a_{11} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{11} + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \Longleftrightarrow \lambda_2 = a_{22}$$

We beschouwen het product van de eigenwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \lambda_1 = a_{11} = \text{ en } \lambda_2 = a_{22} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Longleftrightarrow a_{12}a_{21} = 0 \Longleftrightarrow a_{12} = 0 \vee a_{21} = 0$$

Hieruit besluiten we dat in dit geval de matrix een driehoeksmatrix is.

a. Is $a_{12} = 0$ en $a_{21} \neq 0$ dan is

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{21} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat de x-as een eigenruimte is.

b. Is $a_{21} = 0$ en $a_{12} \neq 0$ dan is

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a_{12} & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat de y-as een eigenruimte is.

c. Is $a_{21} = a_{12} = 0$ dan is

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat de x-as en de y-as eigenruimten zijn.
Zijn de x-as en de y-as eigenruimten behorende bij resp. twee verschillende eigenwaarden dan is de matrix een diagonaalmatrix, die geen scalaire matrix is. De diagonaalelementen zijn dan de eigenwaarden.

(c) Geen enkel diagonaalelement is een eigenwaarde. De matrix is dan zeker geen driehoeksmatrix.
We noemen D de discriminant van de karakteristieke vergelijking.

* Is $D > 0$ dan zijn er twee verschillende eigenwaarden λ_1 en λ_2. De coördinaten van de eigenvectoren behorende bij λ_1 zijn de oplossingen van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{lll}(a_{11}-\lambda_1)x + a_{21}y & = & 0\\ a_{12}x + (a_{22}-\lambda_1)y & = & 0\end{array}\right. \text{ en } \Longleftrightarrow (a_{11}-\lambda_1)x + a_{21}y = 0$$

en De coördinaten van de eigenvectoren behorende bij λ_2 zijn de oplossingen van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{lll}(a_{11}-\lambda_2)x + a_{21}y & = & 0\\ a_{12}x + (a_{22}-\lambda_2)y & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow (a_{11}-\lambda_2)x + a_{21}y = 0$$

We hebben hier twee eigenruimten, nl. twee verschillende vectorrechten want ze behoren bij twee verschillende eigenwaarden.

* Is $D = 0$ dan vallen de eigenwaarden samen. De eigenruimte behorende bij $\lambda_1 = \lambda_2$ is een vectorrechte.
Voorbeeld: De matrix $\begin{bmatrix} 5 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ heeft twee samenvallende eigenwaarden $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. De eigenruimte is de vectorrechte

$$(5-4)x + y = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0$$

* Is $D < 0$ dan zijn er geen eigenwaarden en ook geen eigenvectoren.
Voorbeeld: Een lineaire rotatie heeft geen eigenwaarden en dus ook geen eigenvectoren.

Voorbeelden:

- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

De karacteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 5$$

Voor $\lambda = 1$ zijn de eigenvectoren oplossing van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{l}(2-1)x + y = 0\\ 3x + (4-1)y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x + y = 0\\ 3x + 3y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow x + y = 0$$

$x + y = 0$ is de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 1.
Voor $\lambda = 5$ zijn de eigenvectoren oplossing van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{l}(2-5)x + y = 0\\ 3x + (4-5)y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-3x + y = 0\\ 3x - y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow 3x - y = 0$$

$3x - y = 0$ is de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde 5.

- In een bepaald land zijn twee regio's: het noorden en het zuiden. Omwille van de mooie natuur in het zuiden, verhuist jaarlijks 5 % van de noordelijke bevolking naar het zuiden. Omwille van het betere economische klimaat in het noorden, verhuist jaarlijks 2 % van de zuidelijke bevolking naar het noorden. Aanvankelijk wonen er 3 miljoen in het noorden en 0,5 miljoen in het zuiden. Hoeveel mensen wonen er in het noorden en zuiden na één jaar.
Op een bepaald moment zullen de bevolkingsaantallen in het noorden en het zuiden niet meer veranderen. Hoeveel is dan de verhouding tussen de twee bevolkingsaantallen?

Oplossing: Noem x het aantal inwoners van het noorden.
Noem y het aantal inwoners van het zuiden.
De geassocieerde matrix van de transformatie is

$$\left[\begin{array}{cc}0,95 & 0,02\\ 0,05 & 0,98\end{array}\right]$$

De situatie na één jaar:

$$\left[\begin{array}{cc}0,95 & 0,02\\ 0,05 & 0,98\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c}3\\ 0,5\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}2,87\\ 0,64\end{array}\right]$$

Na één jaar wonen er 2,87 miljoen mensen in het noorden en 1,13 miljoen in het zuiden.

Als de bevolking stabiel moet blijven, dan betekent dat dat de matrix eigenvectoren met eigenwaarde 1 moet bezitten. De determinant van de matrix is

$$\left|\begin{array}{cc}0,95 & 0,02\\ 0,05 & 0,98\end{array}\right| = 0,95 \cdot 0,98 - 0,05 \cdot 0,02 = 0,93$$

De karacteristiek vergelijking:

$$\lambda^2 - (0,95 + 0,98)\lambda + 0,93 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 0,93$$

Voor $\lambda = 1$ zijn de eigenvectoren oplossing van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{l}(0,95-1)x + 0,02y = 0\\ 0,05x + (0,98-1)y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-0,05x + 0,02y = 0\\ 0,05x - 0,02y = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow 0,05x - 0,02y = 0 \Longleftrightarrow 5x - 2y = 0$$

De eigenvectoren met eigenwaarde 1 zijn veelvouden van $(2,5)$.
De populatie zal dus stabiel blijven als het aantal inwoners in het noorden juist 40 % bedraagt van het aantal inwoners van het zuiden.

OPGAVEN — **27** Als f een lineaire permutatie is van Π_O met eigenwaarde $\lambda \neq 0$, dan heeft f^{-1} een eigenwaarde $1/\lambda$. Bewijs dat.

28 Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices:

$$a. \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad c. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d. \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad e. \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad f. \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{bmatrix}$$

29 Bewijs dat een 2×2-matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.

30 Gegeven een lineaire transformatie f van het euclidisch vlak met basisvectoren $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ waarvoor $f(\vec{e_1}) = (2, \frac{1}{3})$ en $f(\vec{e_2}) = (3, 2)$.
Gevraagd:

1. de geassocieerde matrix van f;
2. een tekening van $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, $f(\vec{e_1})$ en $f(\vec{e_2})$;
3. de coördinaat van het beeld $f(A)$ van het punt $A(-1, \frac{1}{2})$ en de constructie van $f(A)$;
4. de coördinaat van het beeld van het punt $B(3,1)$. Wat merk je op?
5. de kern en het beeld van f;
6. de eigenwaarden en eigenvectoren van F;
7. de coördinaten van de punten die op zichzelf worden afgebeeld.

31 Bepaal voor een rotatie over 120^o de vergelijking van het beeld $f(a)$ van de rechte $a : x + y = 3$. Teken a, construeer $f(a)$ en verifieer met de berekening. Bepaal de vergelijking van de rechte die afgebeeld wordt op de rechte met vergelijking $y = -2$. Controleer op de tekening.

OPLOSSINGEN:
28 a. $\lambda = 4$: $y = x$, $\lambda = -1$: $3x + 2y = 0$; b. $\lambda = 4$: $3x - 2y = 0$, $\lambda = -1$: $x + y = 0$; c. $\lambda = 1$: $x = 0$; d. $\lambda = 10$: $y = 2x$, $\lambda = 0$: $y = -\frac{1}{2}x$; e. $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$: $y = \frac{x}{2}$, $\lambda = 0$: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$; f. $\lambda = \frac{5}{2}$: $x - 3y = 0$, $\lambda = -\frac{5}{2}$: $3x + y = 0$.

2.3 Lineaire transformaties van de driedimensionale vectorruimte E_O

2.3.1 Transformatieformules en geassocieerde matrix

We kiezen een basis in de vectorruimte en we geven de beelden van deze basisvectoren als lineaire combinatie van die basisvectoren.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(\vec{e_1}) & = & a_{11}.\vec{e_1} + a_{12}.\vec{e_2} + a_{13}.\vec{e_3} \\ f(\vec{e_2}) & = & a_{21}.\vec{e_1} + a_{22}.\vec{e_2} + a_{23}.\vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) & = & a_{31}.\vec{e_1} + a_{32}.\vec{e_2} + a_{33}.\vec{e_3} \end{array}\right.$$

De geassocieerde matrices zijn van de orde 3.

De transformatieformules zijn:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.3.2 Enkele voorbeelden

* **Parallelprojectie op een vectorvlak volgens de richting van een rechte**
  We projecteren op $\alpha_O : x + y + z = 0$ volgens de richting van $d_O : x = y = z$. We maken gebruik van het feit dat de vectoren van d_O eigenvectoren zijn met eigenwaarde 0 en de vectoren van α_O eigenvectoren zijn met eigenwaarde 1.
  Er geldt:

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  We nemen twee eenvoudige lineair onafhankelijk vectoren van α_O, bvb. $(1, -1, 0)$ en $(0, 1, -1)$. Deze vectoren worden op zichzelf afgebeeld.
  Er geldt

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  en

$$F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Deze drie matriciële betrekkingen kunnen we samenvatten in één matriciële betrekking.

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

De transformatieformules:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De geassocieerde matrix is een singuliere matrix. Een lineaire parallelprojectie op een vectorvlak is geen lineaire permutatie.

OPGAVEN — **32** Bepaal onder de voorgaande projectie het beeld van de rechte $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
Toon an dat het beeld van deze rechte gelegen is in het projectievlak.
Tip: bepaal de beelden van 2 punten van de rechte.

33 Bepaal de verzameling van alle vectoren die afgebeeld worden op de vector $(2, -1, -1)$.

* Spiegeling om een vectorvlak volgens de richting van een rechte

We spiegelen om $\alpha_O : x - 2y + z = 0$ volgens de richting van $d_O : x = -y = z$.

We maken gebruik van het feit dat de vectoren van d_O eigenvectoren zijn met eigenwaarde -1 en de vectoren van α_O eigenvectoren zijn met eigenwaarde 1.
Er geldt:

$$F \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

We nemen twee eenvoudige lineair onafhankelijk vectoren van α_O, bvb. $(1,0,-1)$ en $(0,1,2)$. Deze vectoren worden op zichzelf afgebeeld. Er geldt

$$F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en

$$F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Deze drie matriciële betrekkingen kunnen we samenvatten in één matriciële betrekking.

$$F \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

De transformatieformules:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De geassocieerde matrix is een niet-singuliere matrix. Een lineaire spiegeling om een vectorvlak is een lineaire permutatie.

OPGAVEN — **34** Bepaal de transformatieformules voor de spiegeling om de vectorrechte $d : x = 2y = -2z$ volgens de richting van het vlak $\alpha : 2x + 3y - z = 0$.

35 Gegeven: het beeld van de basis $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ voor een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O$.

a. $f(\vec{e_1})(1,0,0)$, $f(\vec{e_2})(2,1,0)$ en $f(\vec{e_3})(-3,2,-2)$;

b. $f(\vec{e_1})(1,2,-1)$, $f(\vec{e_2})(3,6,-3)$ en $f(\vec{e_3})(-4,8,4)$.

Gevraagd:

1. $\dim(\mathrm{Im} f)$ en $\mathrm{Ker} f$;
2. het beeld van het punt $P(-5, 3, -2)$.
3. het punt P waarvoor $f(P) = (2, -7, 7)$

36 Stel de transformatieformules op voor de loodrechte projectie van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ op het vectorvlak α_O : $3x + 6y + 2z = 0$.

37 Stel de formules op voor de loodrechte projectie van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ op de vectorrechte $a_O : 3x = 6y = 2z$.

38 Gegeven is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ met matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Welk(e) vector(en) hebben de vector $(6, -3, 3)$ als beeld?

39 Gegeven zijn de vlakken $\alpha : 2x - 5y - 6z + 3 = 0$ en $\alpha' : x - 2y + 3z - 6 = 0$ in $\mathbf{E}_O$. Bepaal de lineaire transformatie met matrix

$$F = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

die het vlak α afbeeldt op α'.

40 Men noemt A', B', C' en D' de respectieve zwaartepunten van de zijvlakken $[BCD]$, $[ACD]$, $[ABD]$ en $[ABC]$ van een viervlak $(ABCD)$. Bepaal het centrum en de verhouding van de homothetie die het viervlak $(ABCD)$ afbeeldt op het viervlak $(A'B'C'D')$.

41 Bespreek de dimensie van $\mathrm{Im} f$ en van $\mathrm{Ker} f$.De geassocieerde matrix van f is F:

(a) $F = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ -a & 1 & 4 \\ 0 & a & 7 \end{bmatrix}$ (b) $F = \begin{bmatrix} a-1 & 2 & 1 \\ a & a+2 & a \\ 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix}$

(c) $F = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$ (d) $F = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -2 & b \\ a & 4 & a \end{bmatrix}$

OPLOSSINGEN:
39 $a = 3$, $b = 1$, $c = 5$;
40 centrum Z en verhouding $-1/3$;
35

a.	1. 3, $(0, 0, 0)$	*b.*	1. 2, $r(-3, 1, 0)$
	2.$(7, -1, 4)$		2.$(12, -8, -12)$
	3.$(-17/2, 0, -7/2)$		3./

41

a. dim$= 3 \Longleftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 2$
dim$= 2 \Longleftrightarrow a = 0 \vee a = 2$

b. dim$= 3 \Longleftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 2$
dim$= 2 \Longleftrightarrow a = 0$ dim$= 1 \Longleftrightarrow a = 2$

c. dim$= 3 \Longleftrightarrow a + b \neq 0$
dim$= 2 \Longleftrightarrow a + b = 0 \wedge a \neq 0$ dim$= 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$

d. dim$= 3 \Longleftrightarrow a \neq 2 \wedge a \neq -2 \wedge b \neq 1$
dim$= 2 \Longleftrightarrow a = 2 \vee (a = -2 \wedge b \neq 1) \vee (b = 1 \wedge a \neq -2)$ dim$= 1 \Longleftrightarrow a = -2 \wedge b = 1$

2.3.3 Opsporen van eigenwaarden en eigenvectoren van een (3×3)-matrix

Het stelsel voor het bepalen van de eigenvectoren is

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda)x + a_{21}y + a_{31}z & = & 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{32}z & = & 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + (a_33 - \lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

De karakteristieke vergelijking voor het bepalen van de eigenwaarden van een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ is van de gedaante

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{array} \right| = 0.$$

De karakteristieke vergelijking is van de gedaante:

$$-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det F = 0.$$

waarbij A_{11}, A_{11} en A_{11} de zogenaamde cofactoren zijn van resp. de elementen a_{11}, a_{11} en a_{11} in de matrix F (cofactor van een element in een matrix F is de determinant van de matrix die overblijft als men in de matrix F de rij en de kolom van het element schrapt).

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{ sp}F \text{ en } \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det F.$$

Is een matrix F singulier dan is $\det F = 0$. In de karakteristieke vergelijking is de constante term gelijk aan nul. Een singuliere matrix heeft dus steeds de eigenwaarde $\lambda = 0$.

Opmerking: Is de matrix van een loodrechte spiegeling of van een loodrechte projectie gegeven dan kan men gemakkelijk de spiegelas of de projectieas bepalen d.m.v. het opsporen van eigenwaarden en eigenvectoren.

OPGAVEN — **42** Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende (3×3) matrices:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

43 Bepaal de projectieruimte en de projectierichting van de lineaire parallelprojectie met matrix:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.4 Eigenvectoren van een symmetrische matrix

We weten reeds dat als twee eigenwaarden verschillend zijn de bijbehorende eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn.
Werken we in een euclidisch vectorruimte dan kunnen we nagaan wanneer de twee eigenvectoren, behorende bij twee verschillende eigenwaarden λ_1 en λ_2 orthogonaal zijn. We formuleren het in de volgende stelling:

STELLING 2.3 *Als een matrix symmetrisch is dan zijn de eigenvectoren behorende bij twee verschillende eigenwaarden orthogonaal.*

Bewijs: Stel dat X_1 en X_2 eigenvectoren zijn behorende bij resp. de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van de matrix F en $\lambda_1 \neq \lambda_2$. We moeten aantonen dat het scalair product $X_1^t \cdot X_2 = O$.
Omdat X_1 en X_2 eigenvectoren van F zijn met resp. eigenwaarden λ_1 en λ_2 geldt:

$$F \cdot X_1 = \lambda_1 X_1 \tag{2.5}$$
$$F \cdot X_2 = \lambda_2 X_2 \tag{2.6}$$

We nemen in betrekking 2.5 van beide leden de getransponeerde en houden rekening met $F^t = F$:

$$X_1^t \cdot F = \lambda_1 X_1^t$$

We vermeningvuldigen beide leden rechts met X_2.

$$(X_1^t \cdot F) \cdot X_2 = (\lambda_1 X_1^t) \cdot X_2$$

$$\Updownarrow \text{ ass. eig.}$$

$$X_1^t \cdot (F \cdot X_2) = \lambda_1(X_1^t \cdot X_2)$$

$$\Updownarrow \text{ zie betrekking 2.6}$$

$$X_1^t \cdot (\lambda_2 X_2) = \lambda_1(X_1^t \cdot X_2)$$

$$\Updownarrow \text{ scal. verm.}$$

$$\lambda_2(X_1^t \cdot X_2) = \lambda_1(X_1^t \cdot X_2)$$

$$\Updownarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$X_1^t \cdot X_2 = O$$

□

OPGAVEN — **44** Bewijs dat een symmetrische (2×2)-matrix steeds twee reële eigenwaarden heeft.

2.5 Diagonalisatie

Om de macht A^n van een matrix A te berekenen, moet heel wat gerekend worden. Zelfs een computer heeft het hier lastig mee als de dimensie van A groot is en n groot is. Door gebruik te maken van volgende eigenschap kan het rekenwerk drastisch worden beperkt.

STELLING 2.4 (Diagonalisatie-eigenschap) *Stel A is een $n \times n$-matrix met n lineair onafhankelijke eigenvectoren $X_1, \ldots, X_n$. Als $S = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]$, dan is*

$$S^{-1}AS$$

een diagonaalmatrix. De elementen op de diagonaal zijn de eigenwaarden van A die horen bij de eigenvectoren $X_1, \ldots, X_n$

BEWIJS: Merk vooraf op dat S^{-1} bestaat, omdat de kolommen van S lineair onafhankelijk zijn.

Noem λ_i de eigenwaarde die hoort bij de eigenvector X_i. We vinden dan dat

$$\begin{aligned}
A \cdot S &= A \cdot [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n] \\
&= [A \cdot X_1 \quad A \cdot X_2 \quad \cdots \quad A \cdot X_n] \\
&= [\lambda_1 X_1 \quad \lambda_2 X_2 \quad \cdots \quad \lambda_n X_n] \\
&= [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\square$

Voorbeelden:

- Macht van een matrix
  Bereken A^5 als

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Oplossing:
De matrix met de eigenvectoren als kolomvectoren:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

geldt dat $S^{-1}AS = D$. Bijgevolg is $A = SDS^{-1}$ en dus

$$\begin{aligned}
A^n &= (SDS^{-1})^5 \\
&= (SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \\
&= SD(S^{-1}S)D(S^{-1}S)D(S^{-1}S)D(S^{-1}S)DS^{-1} \\
&= SDI_2DI_2DI_2DI_2DS^{-1} \\
&= SD^5S^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 782 & 781 \\ 2343 & 2344 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Brand switching
  In een supermarkt zijn drie merken choco te krijgen: C1, C2 en C3. Sommige mensen kopen altijd hetzelfde merk. Uit een marktonderzoek blijkt dat 70 % van de kopers van C1 ook de volgende keer C1 zullen kopen. De kopers van C2 zijn iets minder merktrouw: slechts 40 % van hen koopt de volgende keer ook C2. En ook 40 % van de kopers van C3, blijft bij C3. Anderen zijn minder tevreden en proberen eens een ander merk (in het Engels: *brand switching*). Zo stapt 10 % over van C1 naar C2 en 20 % van C1 naar C3. En 50 % ruilt C2 voor C1 en 10 % ruilt C2 voor C3. Van de gebruikers van C3 koopt 50 % de volgende keer C1 en 10 % C2.
  Van tweehonderd klanten, die elke week een pot choco kopen, is geweten dat 40 het merk C1 kochten, 80 het merk C2 en 80 het merk C3. Hoe evolueren deze aantallen op lange termijn?

  OPLOSSING:
  Het aantal klanten dat elk merk koopt na m weken gelijk is aan

$$A^m \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,50 & 0,50 \\ 0,10 & 0,40 & 0,10 \\ 0,20 & 0,10 & 0,40 \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ 80 \end{bmatrix}$$

  Om deze macht uit te rekenen, diagonaliseren we de matrix A. De eigenwaarden zijn

$$\begin{vmatrix} 0,70-\lambda & 0,50 & 0,50 \\ 0,10 & 0,40-\lambda & 0,10 \\ 0,20 & 0,10 & 0,40-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0,2 \vee \lambda = 0,3 \vee \lambda = 1$$

Ga dat na! Voor $\lambda = 0,2$ zijn de bijbehorende eigenvectoren oplossingen van

$$\left\{\begin{array}{c}(0,70-0,2)x+0,50y+0,50z=0\\0,10x+(0,40-0,2)y+0,10z=0\\0,20x+0,10y+(0,40-0,02)z=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}0,50x+0,50y+0,50z=0\\0,10x+0,20y+0,10z=0\\0,20x+0,10y+0,20z=0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x+y+z=0\\x+2y+z=0\\2x+y+2z=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x+y+z=0\\x+2y+z=0\end{array}\right.$$

De oplossingenruimte van dat homogeen stelsel stelt in de ruimte een vectorrechte voor (als doorsnede van twee vectorvlakken). De parametervoorstelling van deze eigenruimte is:

$$(x,y,z) = r(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}) = r(-1,0,1)$$

Toon aan dat de eigenruimten behorende bij de andere eigenwaarden $r(0,-1,1)$ en $r(35,8,13)$ zijn.

We beschouwen de matrix S waarvan de kolomvectoren de eigenvectoren zijn (zie stel.4.2 op p.127).

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 35 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} -21 & 35 & 35 \\ 8 & -48 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Omdat $A = SDS^{-1}$, is

$$A^m = SD^mS^{-1}$$

$$= \frac{1}{56}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 35 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (0,2)^m & 0 & 0 \\ 0 & (0,3)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 & 35 & 35 \\ 8 & -48 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 35+21(0,2)^m & 35-35(0,2)^m & 35-35(0,2)^m \\ 8-8(0,3)^m & 8+48(0,3)^m & 8-8(0,3)^m \\ 13+8(0,3)^m-21(0,2)^m & 13-48(0,3)^m+35(0,2)^m & 13+8(0,3)^m+35(0,2)^m \end{bmatrix}$$

en het aantal kopers van elke merk na m weken wordt dan

$$A^m X_0 = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} 7000 - 4760(0,2)^m \\ 1600 + 2880(0,3)^m \\ 2600 - 2880(0,3)^m + 4760(0,2)^m \end{bmatrix}$$

Op lange termijn, als m zeer groot wordt, worden $(0,2)^m$ en $(0,3)^m$ verwaarloosbaar klein. Het aantal kopers streeft dan naar

$$\frac{1}{56}\begin{bmatrix} 7000 \\ 1600 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 29 \\ 46 \end{bmatrix}$$

OPGAVEN — **45** In een gemeente wordt een gecontroleerd overstromingsgebied aangelegd. Delen van de polder komen daardoor bijna permanent onder water te staan. Ecologen voorspellen dat het aantal insecten daardoor zal wijzigen. Op dit ogenblik worden volgende aantallen vastgesteld:

- 56 insecten per vierkante meter in de polder;
- 13 insecten per vierkante meter in de woonzone.

Dezelfde ecologen voorspellen dat die aantallen maandelijks zullen veranderen volgens de migratiematrix

$$\begin{bmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,02 \\ 0,10 & 0,85 & 0,03 \\ 0,20 & 0,11 & 0,95 \end{bmatrix}$$

waarbij de eerste rij en kolom staan voor het poldergebied dat overstromingsgebied wordt, de tweede rij en kolom voor het poldergebied dat onaangeroerd blijft en de derde rij en kolom voor de woonzone. Voorspel het aantal insecten per vierkante meter op lange termijn.

46 Diagonaliseer de volgende matrices indien mogelijk:

a. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ h. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ i. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.6 Bewerkingen met lineaire transformaties

2.6.1 De som van twee lineaire transformaties

Zijn f en g twee lineaire transformaties van een vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$ met resp. geassocieerde matrices F en G dan geldt:

$$\forall \vec{v} \in V : (f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$$

Merk op dat de geassocieerde matrices van dezelfde orde zijn.

$$F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

De transformatieformules voor de transformaties f en g zijn in verkorte matrixgedaante resp.

$$Y = F \cdot X$$

en

$$Y = G \cdot X.$$

De transformatieformules voor de som $f+g$ zijn in verkorte matrixgedaante:

$$Y = F \cdot X + G \cdot X$$

$$\Updownarrow \text{ distr. v. som t.o.v. prod. v. matrices}$$

$$Y = (F+G) \cdot X$$

Uit deze transformatieformules kunnen we het volgende besluiten.

De geassocieerde matrix van de som van twee lineaire transformaties van $\mathbb{R}, V, +$ is gelijk aan de som van de geassocieerde matrices van de twee lineaire transformaties.

2.6.2 De scalaire vermenigvuldiging van lineaire transformaties

Is f een lineaire transformaties van $\mathbb{R}, V, +$ met geassocieerde matrices F dan is

$$\forall \vec{v} \in V : (r.f)(\vec{v}) = r.f(\vec{v})$$

De transformatieformules voor de transformatie f is in verkorte matrixgedaante:

$$Y = F \cdot X.$$

De transformatieformules voor de scalaire vermenigvuldiging rf zijn in verkorte matrixgedaante:

$$Y = rF \cdot X$$

$$\Updownarrow \text{ gem. ass. v. matrices}$$
$$Y = (rF) \cdot X$$

Uit deze transformatieformules kunnen we het volgende besluiten.

De geassocieerde matrix van het product van een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, V, +$ *met een reëel getal is gelijk aan het product van de geassocieerde matrix van de lineaire afbeelding met dat reëel getal.*

2.6.3 Samenstelling van lineaire transformaties

Zijn f en g twee lineaire transformaties van een vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$ met resp. geassocieerde matrices F en G dan geldt:

$$\forall \vec{v} \in V : (g \circ f)(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$$

De transformatieformules voor f en g zijn in verkorte matrixgedaante resp.:

$$\begin{cases} Y = F \cdot X \\ Z = G \cdot Y \end{cases}$$

De overgangsformules voor de samenstelling $g \circ f$ zijn in verkorte matrixgedaante:

$$Z = G \cdot (F \cdot X)$$
$$\Updownarrow \text{ ass. v. prod. v. matrices}$$
$$Y = (G \cdot F) \cdot X$$

Uit deze overgangsformules kunnen we het volgende besluiten.

De geassocieerde matrix van de samenstelling $g \circ f$ *van twee lineaire transformaties* f *en* g *is gelijk aan het product* $G.F$ *van de geassocieerde matrices van de twee lineaire transformaties in deze volgorde.*

STELLING 2.5 *De samenstelling van twee orthogonale transformaties is opnieuw een orthogonale lineaire transformatie.*

Bijzondere samenstellingen:

- De samenstelling van twee rotaties met resp. hoeken θ_1 en θ_2 is de rotatie met hoek $\theta_1 + \theta_2$.
- De samenstelling van twee loodrechte spiegelingen is een rotatie. Ga zelf na welke de hoek is van de rotatie (analytisch en meetkundig).
- Ga ook na wat de samenstelling is van een rotatie en een loodrechte spiegeling.

De samenstelling van een homothetie en een orthogonale lineaire transformatie is een gelijkvormigheid.

2.6.4 Inverse lineaire transformatie

Enkel de lineaire permutaties hebben een inverse lineaire transformatie. De inverse lineaire transformatie f^{-1} van f met geassocieerde matrix F is weer een lineaire permutatie waarvan de geassocieerde matrix de inverse matrix F^{-1} is.

Met symbolen:

$$f \circ f^{-1} = i_n = f^{-1} \circ f \Longleftrightarrow F.F^{-1} = I_n = F^{-1}.F$$

STELLING 2.6 *De inverse transformatie van een orthogonale lineaire transformatie bestaat en is een orthogonale transformatie. De inverse matrix A^{-1} van een orthogonale matrix A is een orthogonale matrix die gelijk is aan de getransponeerde van A.*

$$A^t.A = I_2$$

Aangezien het product van A^t en A de eenheidsmatrix is, is A^t de inverse matrix van A.

Voor een orthogonale matrix geldt:

$$A^{-1} = A^t.$$

De inverse transformatie van een rotatie met hoek θ is de rotatie met hoek $-\theta$. De inverse transformatie van een spiegeling is de spiegeling zelf ($A^{-1} = A$).

Verder geldt er:

STELLING 2.7 *De determinant van een orthogonale matrix is gelijk aan* 1 *of* -1.

Bewijs: Voor orthogonale matrices geldt:

$$A^t = A^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^t.A = I_n$$

Nemen we van beide leden de determinant dan krijgen we

$$\det A^t \det A = 1$$

Hieruit volgt rekening houdend met $\det A^t = \det A$ dat

$$\det{}^2 A = 1 \Longleftrightarrow \det A = \pm 1$$

OPGAVEN — **47** Bewijs dat een orthogonale 2×2 matrix de determinant heeft gelijk aan 1 als en slechts als de overeenkomstige orthogonale transformatie een rotatie is, en gelijk aan -1 als en slechts als de overeenkomstige orthogonale lineaire transformatie een spiegeling is. Leidt hieruit af dat de samenstelling van een oneven aantal lineaire spiegelingen, opnieuw een lineaire spiegeling is, en dat de samenstelling van zo een even aantal spiegelingen een rotatie is.

48 Is een vector $\vec{v}$ een eigenvector van de lineaire transformaties f en g met respectieve eigenwaarden λ en λ' dan is $\vec{v}$ ook een eigenvector van $f \circ g$ en $g \circ f$ met eigenwaarde $\lambda \cdot \lambda'$. Bewijs dat.

49 Voor welke orthogonale matrics A geldt dat $A + I_2$ opnieuw een orthogonale matrix is?

50* Zoek een nodige en voldoende voorwaarde (een uitdrukking in A en B die gelijk moet zijn aan een constante matrix) opdat de som van twee orthogonale matrices A en B opnieuw een orthogonale matrix is.

51 Onderzoek de structuur voor de optelling en de vermeningvuldiging van de verzameling van de matrices van de gedaante $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Toon ook aan dat zo een matrix de geassocieerde matrix is van de samenstelling van een homothetie en een rotatie.

52 Gegeven is het beeld van een basis voor een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbf{E}_0, +$: $f(\vec{e_1})(5,3,2)$, $f(\vec{e_2})(-3,-1,-2)$ en $f(\vec{e_3})(1,4,-3)$.

Gevraagd:

1. de vergelijkingen van Imf en ker$f$, alsook dim(Imf) en dim(Ker$f$);
2. het beeld van het punt $P(-5,3,-2)$.
3. het punt p waarvoor $f(P) = (2,-7,7)$

53 Gegeven is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ die de vector $(1,2,4)$ op $(5,10,-4)$ afbeeldt, $(3,-1,0)$ op $(1,1,5)$ afbeeldt en $(2,1,-1)$ op $(4,-4,7)$ afbeeldt. Bepaal de matrix van deze transformatie.

54 Gegeven is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ met matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & 2m-3 \\ m & 2(m-1) & 2 \\ m+1 & 3(m-1) & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

Gevraagd:

1. aan welke voorwaarde moet m voldoen opdat f een lineaire permutatie zou zijn?
2. bepaal m zodat f het vlak $x + 2y - z = 0$ afbeeldt op het vlak $7x + 4y - 4z = 0$;
3. bepaal voor $m = 3$ de inverse matrix van F;

55 Gegeven: de lineaire transformatie f van $\mathbf{E}_O$ met matrix $F = \begin{bmatrix} a & b & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ b & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Bepaal a en b zodat Ker$f$ de vectorrechte is door het punt $(2, 1, -1)$.

(ii) Bepaal in $\mathbf{E}_O$ de vergelijkingen Imf en Ker$f$ voor die waarden van a en b, alsook dim(Im(f)) en dim(Ker(f)).

56 Gegeven is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ met matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bepaal het beeld van de rechte $a : (x, y, z) = (2, -1, 3) + r(1, 0, 2)$,
de rechte $b : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$, en het vlak $\alpha : x + 2y - 2z + 3 = 0$.

57 Gegeven de lineaire transformatie $f : \Pi_O \longleftrightarrow \Pi_O : \vec{v} \mapsto f(\vec{v})$ met

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \end{cases}$$

Gevraagd:

1. de geassocieerde matrix F van f en de overgangsformules;
2. is f injectief, surjectief, bijectief?
3. het beeld van $(-1, 1/2)$ en de constructie van het beeld door te steunen op het feit dat f lineair is;
4. beeld van $(3, 1)$. Wat merk je op? Welk soort vector is $(3, 1)$ voor f?
5. de vectoren die op zichzelf worden afgebeeld;
6. de vergelijkingen van Ker(f) en Im(f) in Π_O.

Hoofdstuk 3

Projectief vlak

3.1 Het gecompleteerd affien vlak

We kiezen in $\mathbb{R}, \mathbf{E}_O, +$ een coördinatenstelsel met assen X, Y en Z. Het punt $E(1,1,1)$ bepaalt de ijken op X-as, Y-as en Z-as.
We beschouwen het vlak Π met vergelijking $z = 1$. Dit is het vlak evenwijdig met het (X,Y)-vlak.
We vullen het vlak Π aan met de rechte r_∞, die we **oneigenlijke rechte** (of rechte op oneindig) van Π noemen. De punten van r_∞ worden de **oneigenlijke punten** (of de punten op oneindig) genoemd.

De ruimte $\mathbf{E}_O$ als verzameling van vectorrechten kan nu vanuit O centraal geprojecteerd worden op Π als volgt.

- Een vectorrechte van $\mathbf{E}_O$ wordt afgebeeld op haar snijpunt met Π;

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : a_O \longmapsto A \text{ met } A = a_O \cap \Pi$$

- Een vectorvlak van $\mathbf{E}_O$ wordt afgebeeld op haar snijlijn met Π;

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : \alpha_O \longmapsto a \text{ met } a = \alpha_O \cap \Pi;$$

- Het (X,Y)-vlak van $\mathbf{E}_O$ wordt afgebeeld op r_∞ en de vectorrechten van het (X,Y)-vlak worden afgebeeld op de punten van r_∞.

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : (X,Y)\text{vlak} \longmapsto r_\infty$$

  Dit is omdat het (X,Y)-vlak evenwijdig is met Π en dus geen werkelijke snijlijn heeft met Π. Ook de vectorrechten van het (X,Y)-vlak hebben geen werkelijk snijpunt met Π.

Bijzondere punten en rechten in het gecompleteerd affien vlak Π:

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : Z \longmapsto O_3$$

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : X \longmapsto O_1 \in r_\infty$$
$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : Y \longmapsto O_2 \in r_\infty$$
$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : OE \longmapsto E$$
$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : (X, Z)\text{vlak} \longmapsto O_1O_3 = x$$
$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : (Y, Z)\text{vlak} \longmapsto O_2O_3 = y$$

3.2 De structuur van een projectief vlak

Twee verschillende vectorrechten van $\mathbf{E}_O$ bepalen een vectorvlak. Hieruit volgt dat twee verschillende punten van Π een rechte bepalen in Π.

We beschouwen twee verschillende vectorvlakken α_O en β_O van $\mathbf{E}_O$ en $\alpha_O \cap \beta_O = c_O$.

1. α_O en β_O snijden het vlak Π.

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : \alpha_O \longmapsto a \text{ met } a = \alpha_O \cap \Pi$$

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : \beta_O \longmapsto b \text{ met } b = \beta_O \cap \Pi$$

Voor de onderlinge ligging van de snijdende vlakken α_O en β_O t.o.v. het vlak Π onderscheiden we twee gevallen:

(a) Is $c_O \nparallel \Pi$. Dit is het algemeen geval voor de onderlinge ligging van drie vlakken.

$$\alpha \cap \beta \cap \Pi = a \cap b \cap c_O = C$$

C is een eigenlijk snijpunt van a en b.
Elke twee snijdende eigenlijke rechten snijden elkaar in een eigenlijk punt.

$$a \cap b = C$$

(b) Is $c_O \parallel \Pi$
α_O, β_O en Π zijn twee aan twee niet evenwijdig maar hebben evenwijdige snijlijnen.

$$a \parallel b \parallel c_O$$

Elke twee strikt evenwijdige eigenlijke rechten snijden elkaar in een oneigenlijk punt.

$$a \parallel b \Longleftrightarrow a \cap b = C_\infty$$

2. $\alpha_O \not\parallel \Pi$ en $\beta_O \parallel \Pi \Longrightarrow c_0 \parallel a$.

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : \alpha_O \longmapsto a \text{ met } a = \alpha_O \cap \Pi$$

$$\mathbf{E}_O \longrightarrow \Pi : \beta_O \longmapsto r_\infty$$

Elke eigenlijke rechte snijdt de oneigenlijke rechte in een oneigenlijk punt.

$$a \cap r_\infty = C_\infty$$

Besluit: Het gecompleteerd affien vlak heeft de structuur van een projectief vlak.

1. Door twee verschillende punten van het projectief vlak gaat juist één rechte.
2. Twee verschillende rechten snijden elkaar in juist één punt.

Dit zijn axioma's van een projectief vlak.

3.3 Duale begrippen en duale zegswijzen in een projectief vlak

Als we de eerste vier axioma's van het projectief vlak bekijken dan merken we op dat het derde axioma en het vierde axioma uit elkaar kunnen afgeleid worden door de begrippen van "punt" en "rechte" en de zegswijzen "twee punten verbinden" en "twee rechten snijden" door elkaar te vervangen. Uit deze axioma's leiden we ook onmiddellijk af dat door elk punt oneindig veel rechten gaan. Het tweede axioma zegt dat op elke rechte oneindig veel punten liggen. Dus de twee laatste uitspraken kunnen uit elkaar afgeleid worden door de zegswijzen "een rechte gaat door een punt" en "een punt ligt op een rechte" door elkaar te vervangen.

Het is om deze redenen dat we de volgende begrippen als **duale begrippen** zullen definiëren:

- "**punt**" en "**rechte**";
- "**puntenrij**" en "**stralenbundel**";
- "**driehoek**" en "**driezijde**".

We zullen ook de volgende zegswijzen als **duale zegswijzen** definiëren:

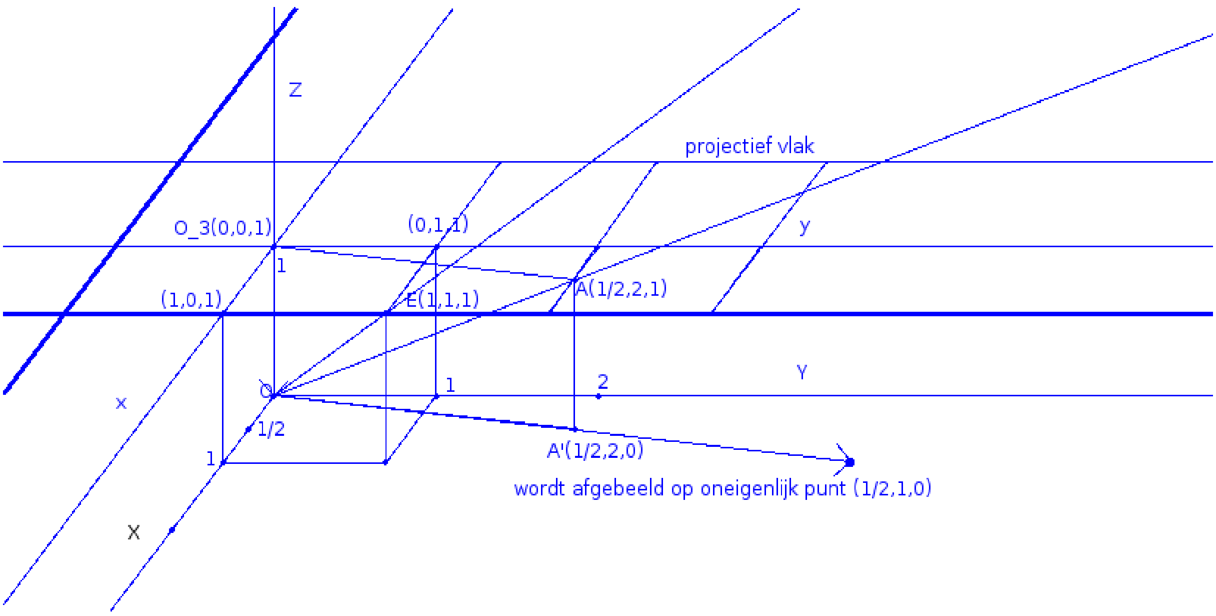
- "**twee punten verbinden**" en "**twee rechten snijden**";

- "**een rechte gaat door een punt**" en "**een punt ligt op een rechte**".

Het vervangen van een begrip door het duale begrip en een uitspraak door de duale uitspraak noemen we **duale omzetting**. In het vervolg zullen alle uitspraken, stellingen en eigenschappen en zelfs definities duaal kunnen worden omgezet. Dit heeft als gevolg dat ook de bewijzen de duale omzettingen zijn en dus niet meer hoeven gevoerd te worden. In het projectief vlak is de theorie volledig symmetrisch t.o.v. punt en rechte, we hebben aldus een winst aan homogeniteit.

3.4 Coördinatisering van het gecompleteerd affien vlak

Het coördinatenstelsel (X, Y, Z, E) in de ruimte $\mathbf{E}_O$ wordt geprojecteerd op het **projectief coördinatenstelsel** $(O_1, O_2, 0_3, E)$ van het gecompleteerd affien vlak Π.
De punten O_1, O_2 en O_3 zijn de **grondpunten**, E is het **eenheidspunt** en de driehoek $(O_1O_2O_3)$ is de **grondriehoek** van het gecompleteerd affien vlak.



Figuur 3.1: Projectieve coördinaat in een gecompleteerd affien vlak

3.4.1 Projectieve of homogene coördinaten van een punt

T.o.v. een coördinatenstelsel (X, Y, Z, E) in de ruimte $\mathbf{E}_O$ beschouwen we een parametervoorstelling van een vectorrechte:

$$a_O : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r. \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ met } (x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$$

T.o.v. een projectief coördinatenstelsel (O_1, O_2, O_3, E) krijgt het punt A als **projectieve of homogene coördinaat in** Π de verzameling van de drietallen:

$$A(r(x_1, y_1, z_1)) \text{ met } r \in \mathbb{R}_0 \text{ en } (x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$$

Bijzondere punten en hun coördinaat in Π:

O_3 heeft als coördinaat $r(0, 0, 1)$ met $r \neq 0$

O_1 heeft als coördinaat $r(1, 0, 0)$ met $r \neq 0$

O_2 heeft als coördinaat $r(0, 1, 0)$ met $r \neq 0$

E heeft als coördinaat $r(1, 1, 1)$ met $r \neq 0$

3.4.2 Verband: projectieve coördinaat en cartesische coördinaat

We kiezen in Π een cartesisch coördinatenstelsel als volgt:

- het beeld van de Z-as als oorsprong $O_3 = O$ met cartesische coördinaat $(0, 0)$;
- het beeld van het (X, Z)-vlak als x-as;
- het beeld van het (Y, Z)-vlak als y-as;
- het beeld van OE als punt met cartesische coördinaat $E(1, 1)$.
  Zo zijn de ijken op x-as en y-as bepaald.

We beschouwen een punt $A(x_1, y_1, z_1)$ in Π.

1. Is $z_1 \neq 0$ dan is het punt $A \in \Pi$ een eigenlijk punt.

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}, 1)$$

In het vlak $z = 1$ is

$$(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}, 1)$$

de coördinaat van A gezien in de ruimte.
Inderdaad:

$$\begin{cases} x = rx_1 \\ y = ry_1 \\ z = rz_1 \\ z = 1 \end{cases} \overset{z_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} r = \frac{1}{z_1} \\ x = rx_1 \\ y = ry_1 \\ z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1}{z_1} \\ y = \frac{y_1}{z_1} \\ z = 1 \end{cases}$$

In het affien vlak Π is $(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1})$ de cartesische coördinaat van A.

Voorbeelden:

- De vectorrechte van $\mathbb{R}, E_O, +$ met basisvector $(1, 4, 2)$ wordt afgebeeld op het projectief punt $A(1, 4, 2)$ met cartesische coördinaat $(\frac{1}{2}, 2)$.
- De vectorrechte van $\mathbb{R}, E_O, +$ met basisvector $(1, 0, 1)$ wordt afgebeeld op het projectief punt $E_1(1, 0, 1)$ met cartesische coördinaat $(1, 0)$.
- De vectorrechte van $\mathbb{R}, E_O, +$ met basisvector $(0, 1, 1)$ wordt afgebeeld op het projectief punt $E_2(0, 1, 1)$ met cartesische coördinaat $(0, 1)$.
- De vectorrechte van $\mathbb{R}, E_O, +$ met basisvector $(1, 1, 1)$ wordt afgebeeld op het projectief punt $E(1, 1, 1)$ met cartesische coördinaat $(1, 1)$.

2. Is $z_1 = 0$ dan is het punt $A = A_\infty$ een oneigenlijk punt en de projectieve coördinaat is van de gedaante $A_\infty(r(l, m, 0))$.
In het vlak Π is (l, m) een stel richtingsgetallen van de richting van de rechte O_3A_∞.

Voorbeelden:

- De vectorrechte met basisvector $\vec{OA'}(\frac{1}{2}, 2, 0)$ wordt afgebeeld op het oneigenlijk punt $(\frac{1}{2}, 2, 0)$. Het oneigenlijk punt bepaalt de richting van de rechte O_3A in Π met een stel richtingsgetallen $(\frac{1}{2}, 2)$. Een ander stel richtingsgetallen van dezelfde richting is $(1, 4)$. Inderdaad dit oneigenlijk punt heeft ook als projectieve coördinaat $(1, 4, 0)$.
- De X-as van $\mathbb{R}, E_O, +$ wordt afgebeeld op het oneigenlijk punt $O_1(1, 0, 0)$ van de x-as in het vlak Π. Inderdaad, een stel richtingsgetallen van de x-as is $(1, 0)$.
- De Y-as van $\mathbb{R}, E_O, +$ wordt afgebeeld op het oneigenlijk punt $O_2(0, 1, 0)$ van de y-as in het vlak Π. Inderdaad, een stel richtingsgetallen van de y-as is $(0, 1)$.

3.5 Rechten in het projectief vlak

3.5.1 Homogene vergelijking van een rechte

Een vergelijking van een vectorvlak in $\mathbf{E}_O$ is

$$ux + vy + wz = 0 \text{ met } (u, v, w) \neq (0, 0, 0)$$

Dit is een **homogene vergelijking** van de corresponderende rechte $a \in \Pi$.
De rechte a krijgt als **lijncoördinaat** in Π de verzameling van de drietallen:

$$a[r(u, v, w)] \text{ met } r \in \mathbb{R}_0 \text{ en } (u, v, w) \neq (0, 0, 0)$$

Bijzondere rechten, hun vergelijking en hun lijncoördinaat in Π:

O_1O_2 heeft als vergelijking $z = 0$ en als lijncoördinaat $[0, 0, 1]$
O_1O_3 heeft als vergelijking $y = 0$ en als lijncoördinaat $[0, 1, 0]$
O_2O_3 heeft als vergelijking $x = 0$ en als lijncoördinaat $[1, 0, 0]$

OPMERKING: Ziehier de dualiteit tussen rechte en punt in een projectief vlak: zowel een punt als een rechte worden analytisch beschreven door een drietal reële getallen op een veelvoud verschillend van nul na.

- EEN RECHTE ALS VERZAMELING VAN PUNTEN: EEN PUNTENRIJ
  De vergelijking van een puntenrij met lijncoördinaat $[u_1, v_1, w_1]$ is
  $$u_1x + v_1y + w_1z = 0$$
  In matrixgedaante:
  $$(u_1\ v_1\ w_1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$
  In verkorte matrixgedaante: $U_1^t \cdot X = 0$

- EEN PUNT ALS VERZAMELING VAN RECHTEN: EEN STRALENBUNDEL
  De vergelijking van een stralenbundel met coördinaat $[x_1, y_1, z_1]$ (de top van de stralenbundel) is
  $$ux_1 + vy_1 + wz_1$$
  In matrixgedaante:
  $$(u\ v\ w) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0.$$
  In verkorte matrixgedaante: $U^t \cdot X_1 = 0$

3.5.2 Verband: homogene vergelijking en cartesische vergelijking van een rechte

1. a is een eigenlijke rechte.
   Een vergelijking in homogene coördinaten is:
   $$ux + vy + wz = 0 \text{ met } (u, v) \neq (0, 0)$$
   Willen we een vergelijking in cartesische coördinaten dan moeten we $z = 1$ stellen.
   $$ux + vy + w = 0 \text{ met } (u, v) \neq (0, 0)$$

2. $a = r_\infty$
   De oneigenlijke rechte heeft enkel een vergelijking in homogene coördinaten.
   $$wz = 0 \text{ met } w \neq 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

3.5.3 Oneigenlijke punt van een eigenlijke rechte

De projectieve coördinaat van het oneigenlijk punt van de rechte $a : ux + vy + wz = 0$ met $(u, v) \neq (0, 0)$ is oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} ux + vy + wz = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ux + vy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Het oneigenlijk punt van a is het punt met projectieve coördinaat $r(v, -u, 0)$.

$(v, -u)$ of elk reëel veelvoud ervan verschillend van nul is een stel richtingsgetallen van de rechte a.

Het oneigenlijk punt van een rechte is dus de richting van de rechte, die onafhankelijk is van de coëfficiënt w van de z-term of, affien geformuleerd, onafhankelijk van de constante term in de cartesische vergelijking van de rechte. De richtingsgetallen van de rechte duiden het oneigenlijk punt van de rechte aan.

Opmerking: Het stelsel 3.1 stelt in $\mathbf{E}_O$ de snijlijn voor van een vectorvlak met het (X, Y)-vlak. Dit levert een vectorrechte op van het (X, Y)-vlak die correspondeert met een oneigenlijk punt van Π.

Voorbeelden:
Het oneigenlijk punt van de rechte $2x - y + z = 0$ is $(1, 2, 0)$.
Het oneigenlijk punt van de rechte $x - 2y + z = 0$ is $(2, 1, 0)$.

Het oneigenlijk punt van de rechte $x - 3y - 5z = 0$ is $(3, 1, 0)$.
Het oneigenlijk punt van de rechte $y = -5x + 3$ is $(1, -5, 0)$.
Het oneigenlijk punt van de rechte $y = \frac{3}{7}x - 1$ is $(7, 3, 0)$.
Het oneigenlijk punt van de rechte $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ is $(3, -\sqrt{3}, 0)$.

OPGAVEN — **58** Bepaal het oneigenlijk punt van de volgende rechten:
$a : 2x - y + 1 = 0$ $\quad$ $b : y = \frac{x}{2} + 3$
c: bepaald door de punten $A(1, 2, -1)$ en $B(0, -1, 3)$ $\quad$ d: bepaald door de punten $A(0, 1, 1)$ en $B(0, -2, 1)$.

59 Bepaal het snijpunt van de rechten $a : x - y + z = 0$ en $b : 2x - 2y + z = 0$.

60 Bepaal de lijncoördinaat van 4 verschillende rechten van de stralenbundel met top $(6, -2, 3)$. Geef dan hun vergelijkingen en maak een tekening.

OPLOSSINGEN:
58 $a : [1, 2, 0]; b : [2, 1, 0]; c : [3, 5, 0]; d : [0, 1, 0]$.
59 $(1, 1, 0)$, de rechten zijn parallel.

Onderzoeksopdracht ⊛ **61** Welke soorten stralenbundels bestaan er in het gecompleteerd affien vlak?

3.6 Transformaties in het projectief vlak

3.6.1 Homografieën

Beschouwen we in $\mathbf{E}_O$ een lineaire transformatie dan is de geassocieerde matrix F een (3×3)-matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dit is dan ook de matrix van een transformatie in het gecompleteerd vlak Π. Zo een transformatie noemen we een **homografie van het gecompleteerd affien vlak**.
Omdat de coördinaat van een punt slechts op een evenredigheidsfactor ($\neq 0$)) na bepaald is, is ook de geassocieerde matrix van een homografie slechts op een evenredigheidsfactor ($\neq 0$)) na bepaald.
De transformatieformules zijn:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

waarbij de kolomvectoren van de geassocieerde matrix F de beelden zijn van de respectieve grondpunten O_1, O_2 en O_3.
In verkorte matrixgedaante:

$$Y = F.X.$$

3.6.2 Collineaties

3.6.2.1 De fundamentaalstelling van de reële projectieve vlakke meetkunde

STELLING 3.1 *Een bijectieve homografie van het projectief vlak beeldt een rechte af op een rechte.*

Bewijs: Deze stelling volgt onmiddellijk uit het feit dat een lineaire permutatie van $\mathbf{E}_O$ een vectorvlak afbeeldt op een vectorvlak. Een vectorvlak in $\mathbf{E}_O$ correspondeert met een rechte in het projectief vlak.

We noemen een bijectieve homografie van het projectief vlak een **collineatie van het projectief vlak** omdat rechten op rechten worden afgebeeld. We zeggen dat de rechte een **projectieve invariant** is. Collineaties behouden de *lijnen*. Er bestaan geen andere permutaties die de structuur van de rechten behoudt dan diegene die we met een matrix kunnen voorstellen. Dit verklaart ook het belang van de lineaire transformaties in de meetkunde en algebra.

STELLING 3.2 *Elke collineatie van het projectief vlak correspondeert met een niet-singuliere* (3×3)*-matrix of elk reëel veelvoud ervan verschillend van nul. Omgekeerd correspondeert met een niet-singuliere* (3×3)*-matrix of elk reëel veelvoud ervan verschillend van nul eenzelfde collineatie van het projectief vlak.*

3.6.2.2 Verandering van de lijncoördinaat van een rechte bij een collineatie

We beschouwen de rechte $a : ux + vy + wz = 0$. De vergelijking kunnen we in matrixgedaante zetten:

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Het beeld (x', y', z') van (x, y, z) onder een collineatie f met matrix F $(\det F \neq 0)$ is

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = F. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Vermits de geassocieerde matrix F van een collineatie een reguliere matrix is bestaat de inverse matrix F^{-1}.

De bovenstaande formule 3.3 is dus gelijkwaardig met

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F^{-1}. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

Vervangen we (x, y, z) in de gelijkheid 3.2 door het tweede lid van 3.4 dan bekomen we:

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} .F^{-1}. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

De lijncoördinaat $[u', v', w']$ van het beeld van de rechte A is

$$\begin{pmatrix} u' & v' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} .F^{-1}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = F^{-t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

De exponent $-t$ betekent inverse nemen en transponeren.

Belangrijke opmerking: De formules voor de verandering van de lijncoördinaat van een rechte zijn analoog met die voor de verandering van de coördinaat van een punt, vermits ook $\det F^{-t} \neq 0$. We verkrijgen de duale eigenschappen voor een collineatie:

Een collineatie beeldt een stralenbundel af op een stralenbundel.

Voorbeeld: Zoek het beeld van de rechte $2x + y + z = 0$ voor de collineatie met matrix

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oplossing: De inverse matrix is

$$F^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Het beeld van de rechte $[2, 1, 1]$ is de rechte met lijncoördinaat

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Het beeld van de rechte $2x + y + z = 0$ is de rechte $5x' + 4y' + 2z' = 0$.

$\boxed{\textbf{TAAK}}$ ♣ **62** Kies in het voorgaande voorbeeld zelf een punt van de rechte $2x + y + z = 0$ en ga na of het beeld van dat punt op de rechte $5x' + 4y' + 2z' = 0$ ligt.

♣ **63** Bepaal in het voorgaande voorbeeld het beeld van de stralenbundel $3u - 4v + 6w = 0$

3.6.3 Affiene transformaties

Een **affiene transformatie** van het gecompleteerd affien vlak is een homografie van het gecompleteerd affien vlak waarbij de beelden van eigenlijke punten eigenlijke zijn en de beelden van oneigenlijke punten oneigenlijk.
In een gecompleteerd affien vlak zijn de beelden van de oneigenlijke punten O_1 en O_2 oneigenlijke punten en het beeld van het eigenlijk punt O_3 is een eigenlijk punt.
De transformatieformules zijn:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{met } a_{33} \neq 0 \tag{3.6}$$

De geassocieerde matrix is slechts bepaald op een evenredigheidsfactor verschillend van nul na.

Als we enkel de beelden willen kennen van de eigenlijke punten van het affien vlak dan kunnen we de geassocieerde matrix zodanig kiezen dat $z = 1$ is. Daartoe delen we alle elementen van de matrix door $a_{33} \neq 0$. De nieuwe matrix behoort bij dezelfde affiene transformatie.
Stel $\frac{a_{13}}{a_{33}} = x_0, \quad \frac{a_{23}}{a_{33}} = y_0, \quad \frac{a_{11}}{a_{33}} = l_1, \quad \frac{a_{12}}{a_{33}} = l_2, \quad \frac{a_{21}}{a_{33}} = m_1, \quad \frac{a_{22}}{a_{33}} = m_2$
De transformatieformules 3.6 kunnen dus in de volgende gedaante gebracht worden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x_0 \\ m_1 & m_2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

in gedaante van een stelsel:

$$\begin{cases} x' = l_1 x + l_2 y + x_0 \\ y' = m_1 x + m_2 y + y_0 \end{cases}$$

Uit de formules 3.8 leiden we af dat een affiene transformatie de samenstelling is van een lineaire transformatie gevolgd door een verschuiving.
De koppels (l_1, m_2) en (l_2, m_2) zijn de coördinaten van de beelden van resp. de eerste en de tweede basisvector van Π voor de lineaire transformatie en (x_0, y_0) is de coördinaat van de vector van verschuiving. Vergelijk met de functie $y = ax + b$.

Als in het gecompleteerd vlak een affiene transformatie de samenstelling is van een lineaire permutatie en een verschuiving dan is dat een collineatie. Enkele voorbeelden zijn: een

homothetie met factor verschillend van nul, een evenwijdige spiegeling om een rechte, een puntspiegeling (niet de nultransformatie), een verschuiving, een uitrekking (inkrimping) met factor verschillend van nul.
Daarentegen is een evenwijdige projectie een affiene transformatie maar geen collineatie.

In het euclidisch vlak is een **orthogonale transformatie** een collineatie. Een orthogonale transformatie is dus de samenstelling van een orthogonale lineaire transformatie (rotatie om O of loodrechte spiegeling) en een verschuiving.
Een loodrechte projectie is geen orthogonale transformatie.

Voorbeelden:

- Gegeven de matrix van een affiene transformatie f in het euclidisch vlak:

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Welke affiene transformatie is f in het euclidisch vlak?
2. Construeer het beeld van het punt $A(3,4)$ en controleer met een berekening;
3. Bepaal de vergelijking van het beeld van de rechte $a : 3x - 2y + 6 = 0$;
4. Bepaal de vergelijking van het beeld van de cirkel $c : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$;
5. Maak een tekening met of zonder computer.

OPLOSSING: De transformatieformules zijn:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Om 3 en 4 te kunnen beantwoorden moeten we (x, y, z) in functie van (x', y', z') uitdrukken. Met de computer berekenen we det$F = -64 \neq 0$. F is inverteerbaar.

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 1/8 & -3/16 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

De omgevormde transformatieformules zijn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.
$$F = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f is de samenstelling van een lineaire transformatie met matrix $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ en een verschuiving over de vector $\vec{v}(\frac{3}{2}, 0)$.

2.
$$f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$f(A)$ met homogene coördinaat $(12, 20, 4)$ heeft $(3, 5)$ als cartesische coördinaat.

3. De lijncoördinaat U' van het beeld van a is

$$U' = F^{-t}(U)$$

$$\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 & 0 \\ 3/16 & 1/8 & 0 \\ 3/16 & -3/16 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{45}{16} \end{pmatrix}$$

De vergelijking van $f(a) : -14x' + 5y' + 45 = 0$.

4. Met de computer vervangen we in de vergelijking van de cirkel, x door $-\frac{1}{2}x' + \frac{3}{4}y' + \frac{3}{4}$ en y door $x' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}$. Het beeld van de cirkel is de kromme met vergelijking $20x'^2 + 4x'y' + 13y'^2 + 52x' + 18y' - 219 = 0$. We tekenen deze kromme met de computer en zien dat deze vergelijking een ellips voorstelt. Het beeld van een cirkel is hier geen cirkel. De cirkel is geen affiene invariant.

- Stel de transformatieformules op voor een spiegeling om de rechte $x = 4$ volgens de richting van de x-as.
  Oplossing: Zij $A(x, y)$ en $f(A(x', y')$ dan is $\frac{x+x'}{2} = 4 \Longleftrightarrow x' = 8 - x$, de y-coördinaat blijft gelijk dus $y' = y$. De transformatieformules zijn:

$$\begin{cases} x' = -x + 0y + 8 \\ y' = 0x + y + 0 \end{cases}$$

In matrixgedaante

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

De spiegeling om $x = 4$ is de samenstelling van een spiegeling om y-as en een verschuiving met de vector $\vec{v}(8, 0)$. Maak een tekening.

- Stel de transformatieformules op van de loodrechte projectie op $a : 2x + 3y - 6 = 0$. Oplossing: De loodrechte projectie op de rechte $a : 2x + 3y - 6 = 0$ is de samenstelling van de loodrechte projectie op de rechte $a_o : 2x + 3y = 0$ en de verschuiving met vector $\vec{v}(x_1, y_1)$.

  1. De loodrechte projectie op a_o:

$$F \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$F = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

De gevraagde transformatie heeft een geassocieerde matrix van de gedaante

$$\begin{pmatrix} 9/13 & -6/13 & x_0 \\ -6/13 & 4/13 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De punten van a zijn dekpunten (punten die afgebeeld worden op zichzelf). Een dekpunt is bvb. $(3, 0, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 9/13 & -6/13 & x_0 \\ -6/13 & 4/13 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 27/13 + x_0 \\ -18/13 + y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Waaruit volgt dat $(x_0, y_0) = (\frac{12}{13}, \frac{18}{13})$. De gevraagde loodrechte spiegeling heeft matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 & 12 \\ -6 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

OPGAVEN — **64** Gegeven is de matrix $F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ van een affiene transformatie f in het euclidisch vlak. Gevraagd:

(i) Geef de transformatieformules van f;

(ii) Het beeld van het punt $A(2, 0)$;

(iii) Het beeld van de rechte $a : \frac{x}{8} - \frac{y}{3} = 1$;

(iv) Het beeld van de parabool $p : y = x^2 - 2x - 5 = 0$. Welk soort kromme is het beeld.

(v) Bepaal de punten die op zichzelf worden afgebeeld (dekpunten).

65 Stel transformatieformules op van de affiene transformatie die de samenstelling is van de projectie op de rechte $y = 3x$ volgens de richting van de rechte $y = -\frac{2}{3}x$ en de verschuiving met vector $\vec{v}(0, -5)$. Zoek dan de coördinaat van het beeld van het punt $(1, 5)$. Maak een tekening. Is deze transformatie een projectie?

66 Stel de transformatieformules op van een orthogonale transformatie die de samenstelling is van de lineaire rotatie over 120^o en de verschuiving met vector $\vec{v}(1, 2)$. Bepaal het beeld van een cirkel. Is deze transformatie een rotatie? Zoja, om welk punt?

67 Gegeven is de rotatie die de samenstelling is van de lineaire rotatie over 45^o gevolgd door de verschuiving met vector $\vec{v}(1, 2)$

1. Stel de transformatieformules op van de rotatie;
2. Bereken de coördinaat van het centrum van rotatie;
3. Bepaal de beelden van de basisvectoren. Controleer op de tekening;
4. Construeer het centrum van de rotatie en controleer met de resultaten door berekening.

68 Gegeven is de samenstelling is van de loodrechte spiegeling om de rechte $y = -2x$ en de verschuiving met vector $\vec{v}(1, 3)$

1. Stel de transformatieformules op van deze transformatie;
2. Bepaal de beelden van de basisvectoren. Controleer op de tekening;
3. Is deze transformatie een spiegeling om een rechte?

69 Gegeven is de rotatie om het punt $(2, 1)$ over een hoek van 30^o.

1. Stel de transformatieformules op deze rotatie;
2. Deze rotatie is de samenstelling van een lineaire rotatie over een hoek van 30^o en een verschuiving over $\cdots\cdots\cdots\cdots$?
3. Maak een tekening en controleer je resultaten.

70 Gegeven is de rechte $a : 2x - 3y + 6 = 0$.

1. Stel de transformatieformules op van de loodrechte spiegeling om a;
2. Stel de transformatieformules op van de loodrechte projectie op a.

Hoofdstuk 4

Kegelsneden

4.1 Definitie in de ruimte

In $\mathbf{E}_O$ is een **kegeloppervlak** met top O het oppervlak dat ontstaat door het wentelen van de rechte b_O om een vaste rechte a_O. Een kegeloppervlak met top O is dus de verzameling van oneindig veel vectorrechten b_o die allemeaal een vaste hoek θ insluiten met de as van wenteling a_O (de hoek tussen twee rechten is altijd de scherpe hoek).
De rechten b_O worden de **beschrijvenden van het kegeloppervlak** genoemd.

$\boxed{\text{Doorsnede van een kegeloppervlak met een vlak } \Pi_0 \text{ door de top}}$.
We noemen α de hoek die Π_0 insluit met de as a_O van het kegeloppervlak (de hoek tussen een rechte en een vlak is altijd de scherpe hoek).

1. $\alpha > \theta$: Π_O en het kegeloppervlak hebben enkel de top gemeenschappelijk.

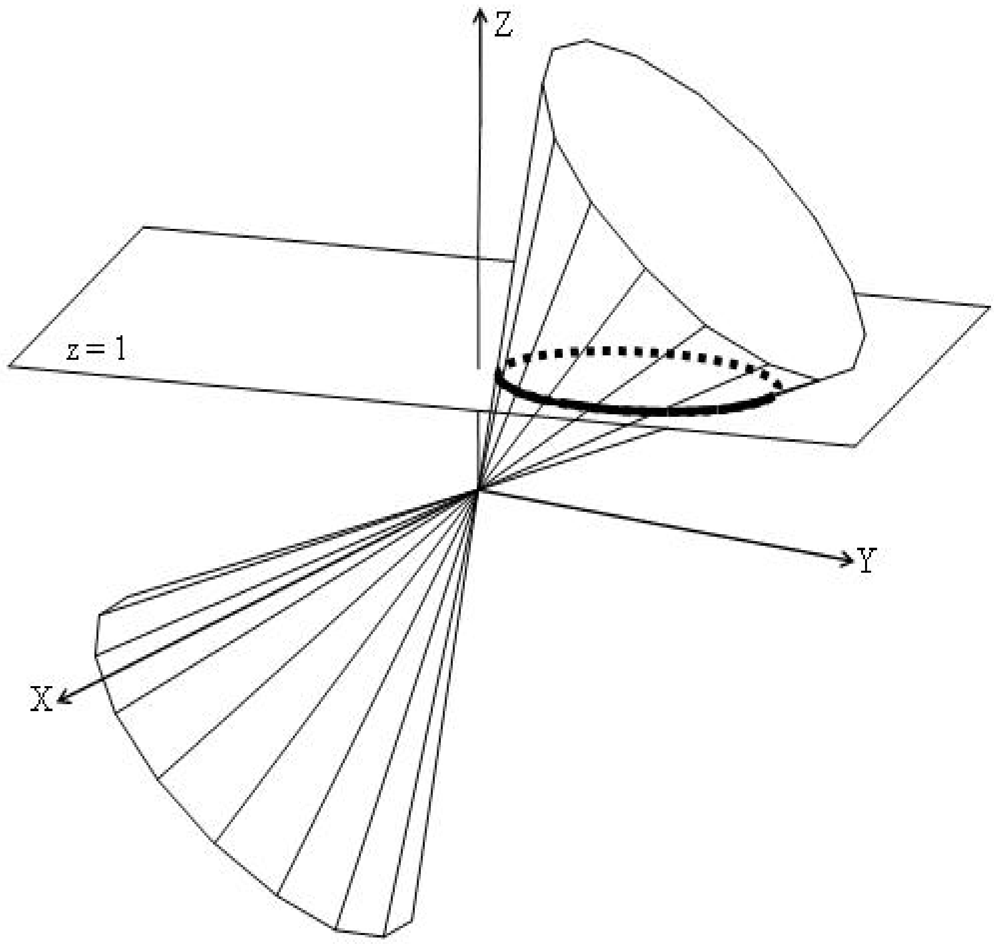
2. $\alpha = \theta$: Π_O raakt het kegeloppervlak volgens een beschrijvende van het kegeloppervlak. Het vectorvlak en het kegeloppervlak hebben een vectorrechte gemeenschappelijk.

3. $\alpha < \theta$: Π_O snijdt het kegeloppervlak volgens twee beschrijvenden van het kegeloppervlak. Het vectorvlak en het kegeloppervlak hebben twee verschillende vectorrechten gemeenschappelijk.

Een **kegelsnede in het gecompleteerd affien vlak** is de centrale projectie (in $\mathbf{E}_O$) met centum O op $\Pi \overset{\text{strikt}}{\parallel} \Pi_0$ van een kegeloppervlak met top O. Hierbij worden de beschrijvenden van het kegeloppervlak geprojecteerd op punten van de kegelsnede.

Al naar gelang de onderlinge ligging het kegeloppervlak t.o.v. van Π bekomen we verschillende soorten kegelsneden.

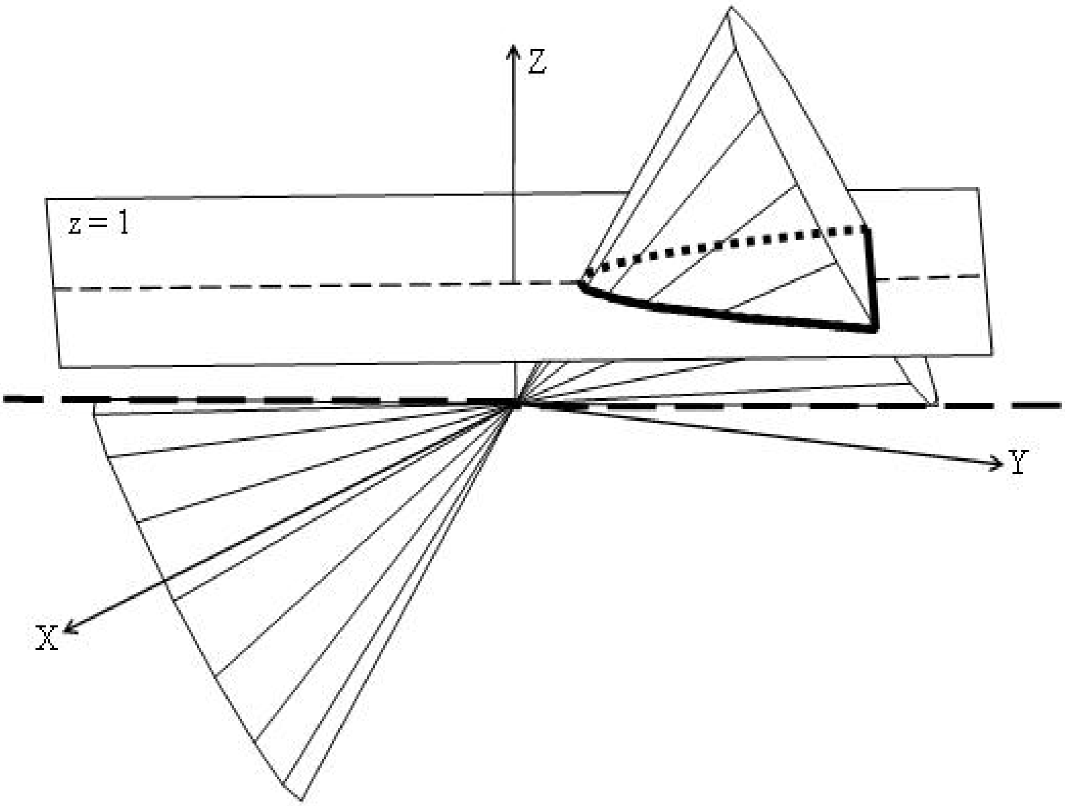
1. $\theta < \alpha \leq 90^o$ (duid θ en α aan op de figuur).
   Het vlak Π snijdt alle beschrijvende van het kegeloppervlak. Geen enkele beschrijvende is evenwijdig met Π. De doorsnede is een **ellips**. Alle punten van de ellips zijn eigenlijke punten.



Figuur 4.1: de ellips

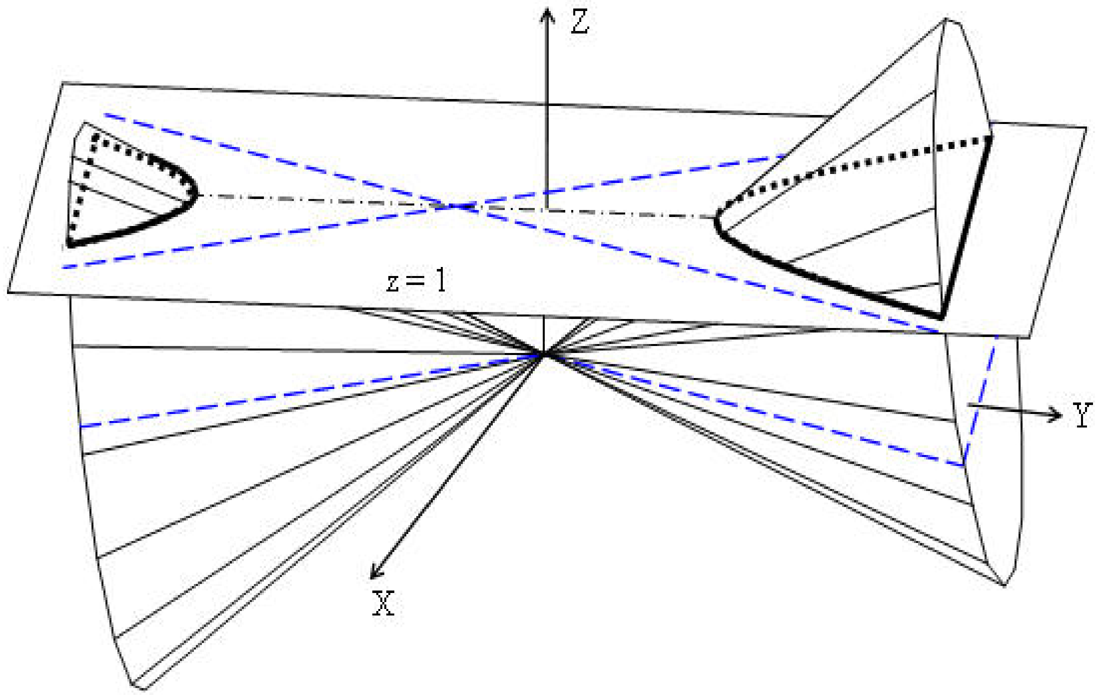
Is in het bijzonder $\alpha = 90^o$ dan staat de as van het kegeloppervlak loodrecht op Π en is de ellips een **cirkel**.

2. $\alpha = \theta$ (duid θ en α aan op de figuur).
   Het vlak Π is evenwijdig met één beschrijvende. Het vlak Π snijdt alle beschrijvende van het kegeloppervlak uitgezonderd één beschrijvende. De doorsnede is een **parabool**.
   Hieruit volgt dat een parabool één oneigenlijk punt heeft.



Figuur 4.2: de parabool

3. $\alpha < \theta$ (duid θ en α aan op de figuur).
   Het vlak Π is evenwijdig met twee beschrijvenden. Het vlak Π snijdt alle beschrijvende van het kegeloppervlak uitgezonderd twee beschrijvenden. De doorsnede is een **hyperbool**. Hieruit volgt dat een hyperbool twee oneigenlijke punten heeft.



Figuur 4.3: de hyperbool

4.2 Vergelijking van een kegelsnede

In het gecompleteerd affien vlak

T.o.v. een coördinatenstelsel in de ruimte $\mathbf{E}_O$ is een vergelijking van een kegeloppervlak van de gedaante:

$$\varphi(x,y,z) : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \tag{4.1}$$

De vergelijking 4.1 is een vergelijking van een kegelsnede in het gecompleteerd affien vlak Π. Deze vergelijking is een **homogene en kwadratische vergelijking** in drie onbekenden x, y en z.

In het affien vlak

Willen we de vergelijking in cartesische coördinaten dan moeten we $z = 1$ stellen.

$$\varphi(x,y,1) : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{23}y + 2a_{13}x = 0. \tag{4.2}$$

We rangschikken de termen in een andere volgorde

$$\varphi(x,y,1) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{4.3}$$

Deze vergelijking drukt de nodige en voldoende voorwaarde uit voor de coördinaat van een eigenlijk punt P opdat dat punt op de kegelsnede K zou gelegen zijn. De vergelijking 4.2 stelt dus de vergelijking voor van een kegelsnede in het affien vlak.

In matrixgedaante

We schrijven de vergelijking 4.1 als volgt:

$$a_{11}xx + a_{22}yy + a_{33}zz + (a_{12}xy + a_{12}xy) + (a_{13}xz + a_{13}xz) + (a_{23}yz + a_{23}yz) = 0$$

en we nemen de negen termen per drie samen:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z)y + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)z = 0.$$

Het eerste lid is een lineaire combinatie van x, y en z die we als product van twee matrices kunnen schrijven.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z & a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

De eerste matrix is een (1×3)-matrix die op zijn beurt het product is van twee matrices, een (1×3)-matrix en een (3×3)-matrix.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

In verkorte matrixgedaante:

$$X^t \cdot D \cdot X = 0$$

4.3 Oneigenlijke punten of asymptotische richtingen van een kegelsnede

Om de oneigenlijke punten van een kegelsnede op te sporen snijden we de kegelsnede met de oneigenlijke rechte.
We beschouwen daartoe het stelsel

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Het stelsel 4.4 stelt in $\mathbf{E}_O$ de doorsnede voor van het kegeloppervlak met het (X, Y)-vlak.
Als $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$ kan de kwadratische vorm

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

in $\mathbb{C}$ steeds ontbonden worden in twee lineaire factoren.
De discriminant van de kwadratische vorm is

$$4a_{12}^2 - 4a_{22}a_{11}$$

Stel

$$\delta = -(a_{12}^2 - a_{22}a_{11}) = a_{22}a_{11} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1. Is $\delta > 0 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ stelt in $\mathbf{E}_O$ twee toegevoegd imaginaire vectorrechten voor in het (X, Y)-vlak.

   Dit levert <u>twee toegevoegd imaginaire oneigenlijke punten</u> op in Π en dus geen reële oneigenlijke punten.
   Het stelsel in $\mathbf{E}_O$ stelt enkel het punt O. We bevinden we ons in het geval van een ellips. (zie figuur 4.1).

2. Is $\delta = 0 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ stelt in $\mathbf{E}_O$ twee samenvallende vectorrechten voor in het (X, Y)-vlak.

   Dit levert <u>twee samenvallende reële oneigenlijke punten</u> op in Π.
   We bevinden ons in het geval van een parabool. (zie figuur 4.2).

3. Is $\delta < 0 \longrightarrow \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ stelt in $\mathbf{E}_O$ twee verschillende vectorrechten voor in het (X, Y)-vlak.

   Dit levert twee reële oneigenlijke punten op in Π.
   We bevinden we ons in het geval van een hyperbool. (zie figuur 4.3).

Oneigenlijke punten van een kegelsnede worden ook **asymptotische richtingen** van de kegelsnede genoemd.

BESLUIT: De aard van een kegelsnede in het gecompleteerd affien vlak:

1. $\boxed{\delta > 0}$ $\leftrightsquigarrow$ **de ellips**
   - snijdt de oneigenlijke rechte in twee toegevoegd imaginaire oneigenlijke punten.
   - heeft twee toegevoegd imaginaire asymptotische richtingen.
2. $\boxed{\delta = 0}$ $\leftrightsquigarrow$ **de parabool**
   - raakt de oneigenlijke rechte in een reëel oneigenlijk punt.
   - heeft twee samenvallende reële asymptotische richtingen.
3. $\boxed{\delta < 0}$ $\leftrightsquigarrow$ **de hyperbool**
   - snijdt de oneigenlijke rechte in twee reële oneigenlijke punten.
   - heeft twee reële asymptotische richtingen.

Bijzondere gevallen:

- de x-richting is asymptotische richting van de kegelsnede als het oneigenlijk punt O_1 behoort tot de kegelsnede.
  Dit is als $(1, 0, 0)$ voldoet aan de vergelijking van de kegelsnede.
  De voorwaarde is $a_{11} = 0 \leftrightsquigarrow$ de x^2-term ontbreekt in de vergelijking van de kegelsnede.
- Analoog is de y-richting asymptotische richting van de kegelsnede als en slechts als de y^2-term ontbreekt in de vergelijking van de kegelsnede.

Voorbeelden:

- De kegelsnede $x^2 + y^2 = 1$ heeft als asymptotische richtingen de punten $(1, i, 0)$ en $(1, -i, 0)$ en is een ellips $(\delta = 1)$.

- De kegelsnede $xy = 1$ heeft als asymptotische richtingen $(1, 0, 0)$ en $(0, 1, 0)$ en is een hyperbool ($\delta = -\frac{1}{4}$).

- De kegelsnede $y = x^2$ heeft als asymptotische richting 2 keer geteld het punt $(0, 1, 0)$ en is een parabool ($\delta = 0$).

- Bepaal de asymptotische richtingen van de kegelsnede

$$-2x^2 + 3xy - y^2 - 4x + 5y - 1 = 0.$$

  OPLOSSING:

$$-2x^2 + 3xy - y^2 = 0 \Longleftrightarrow (2x - y)(x - y) = 0.$$

  De asymptotische richtingen zijn $(1, 2, 0)$ en $(1, 1, 0)$.
  De kegelsnede is een hyperbool.

- Bepaal de oneigenlijke punten van de kegelsnede

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 3y - 5 = 0.$$

  OPLOSSING:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x + y)^2 = 0.$$

  De asymptotische richting is twee keer geteld $(1, -1, 0)$.
  De kegelsnede is een parabool.

- Bepaal de asymptotische richtingen van de kegelsnede

$$36x^2 + 36xy + 9y^2 - 24x + 12y + 8 = 0.$$

  OPLOSSING:

$$9(4x^2 + 4xy + y^2) = 0 \Longleftrightarrow (2x + y)^2 = 0.$$

  De asymptotische richting is twee keer geteld $(1, -2, 0)$.
  De kegelsnede is een parabool.

- Bepaal de asymptotische richtingen van de kegelsnede

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 - x + 2y + 5 = 0.$$

  OPLOSSING:

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{3}x + (1 + i)y)(\sqrt{3}x + (1 - i)y) = 0.$$

  De asymptotische richtingen zijn $(1 + i, -\sqrt{3}, 0)$ en $(i - 1, \sqrt{3}, 0)$.
  De kegelsnede is een ellips.

- Bepaal de asymptotische richtingen van de kegelsnede $3x^2 + 5xy - x + 2y + 5 = 0$.
  Oplossing:
  $$3x^2 + 5xy = 0 \Longleftrightarrow x(3x + 5y) = 0.$$
  De asymptotische richtingen zijn $(0, 1, 0)$ en $(5, -3, 0)$.
  De kegelsnede is een hyperbool.

- Welke kegelsneden hebben de richtingen $(2, 3, 0)$ en $(-1, 8, 0)$ als asymptotische richtingen?
  Oplossing: $(3x-2y)(8x+y) = 0$. De algemene vergelijking van al deze kegelsneden is van de gedaante:
  $$24x^2 - 13xy - 2y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

- Welke kegelsneden hebben de x-richting en de richting $(3, 1, 0)$ als asymptotische richtingen?
  Oplossing: $y(x - 3y) = 0$. De algemene vergelijking van al deze kegelsneden is van de gedaante:
  $$xy - 3y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

- Welke kegelsneden hebben $(1, -1, 0)$ en $(1, 3, 0)$ als asymptotische richtingen?
  Oplossing: $(x + y)(3x - y) = 0$. De algemene vergelijking van al deze kegelsneden is van de gedaante:
  $$3x^2 + 2xy - y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

- Welke kegelsneden hebben $(1 + i, 3 - 2i, 0)$ en $(1 - i, 3 + 2i, 0)$ als asymptotische richtingen?
  Oplossing: $((3-2i)x-(1+i)y)((3+2i)x-(1-i)y) = 0$. De algemene vergelijking van al deze kegelsneden is van de gedaante:
  $$13x^2 - 2xy + 2y^2 + 2a_{23} + 2a_{13}x + a_{33} = 0.$$

OPGAVEN — 71 Teken de volgende kegelsneden en bepaal hun asymptotische richtingen:

a. $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + y + 7 = 0$;

b. $y = ax^2 + bx + c$;

c. $y^2 = x$;

d. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + y - 1 = 0$;

e. $x^2 + 2xy + 3x - y + 1 = 0$;

f. $2x^2 + 6y^2 + 3y + 1 = 0$;

g. $2x^2 - xy - y^2 - x + 7y - 10 = 0$;

h. $10x^2 - 11xy + 4y^2 - 10x - 5y = 0$.

72 Bepaal de algemene vergelijking van alle kegelsneden die de volgende richtingen als asymptotische richtingen hebben

a. de x-richting en de y-richting;

b. de richtingen $(1, i, 0)$ en $(1, -i, 0)$;

c. twee richtingen die symmetrisch liggen t.o.v. de x-richting.

73 Bespreek de aard van de asymptotische richtingen van de kegelsneden met algemene vergelijking

$$hx^2 + 4xy + (h+3)y^2 + x + y = 0.$$

Oplossingen:
71 a. $(1, 1, 0)$ en $(3, 2, 0)$;
b. $(0, 1, 0)$, $2\times$ geteld;
c. $(1, 0, 0)$, $2\times$ geteld;
d. $(1, 1, 0)$, $2\times$ geteld;
e. $(2, -1, 0)$ en $(0, 1, 0)$;
f. $(\sqrt{3}, i, 0)$ en $(\sqrt{3}, -i, 0)$; g. $(1, 1, 0)$ en $(1, -2, 0)$; h. $(8, 11 + i\sqrt{39}, 0)$ en $(8, 11 - i\sqrt{39}, 0)$.
72 a. $xy + 2hx + 2ky + l = 0$; b. $x^2 + y^2 + 2hx + 2ky + l = 0$; c. $a^2x^2 \pm b^2y^2 + 2hx + 2ky + l = 0$.

4.4 Ontaarde kegelsneden

Als de kwadratische vorm $\varphi(x, y, z)$ ontbindbaar is in twee factoren van de eerste graad dan ontaardt het kegeloppervlak in de unie van twee vectorvlakken en de daarbijhorende kegelsnede in Π ontaardt in de unie van twee rechten. Deze rechten noemen we **de componenten van de ontaarde kegelsnede**.
Een gemeenschappelijk punt van de componenten noemen we een **dubbelpunt van de ontaarde kegelsnede**.

$$c_1 \cup c_2 : (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z) = 0 \tag{4.5}$$

Voorbeelden:

- $x^2 - 2y^2 + 10z^2 + yz - 7zx + xy = 0 \Longleftrightarrow (x - y - 2z)(x + 2y - 5z) = 0.$
  De componenten zijn $x - y - 2z = 0$ en $x + 2y - 5z = 0$.
  Het dubbelpunt is het reëel eigenlijk punt $(3, 1, 1)$.
  De kegelsnede ontaardt in twee **reële eigenlijke snijdende rechten**.
  Deze kegelsnede heeft twee verschillende reële oneigenlijke punten.
  Deze ontaarde kegelsnede is een **ontaarde hyperbool**.

- $8x^2 + 13y^2 + z^2 + 4xy + 6yz + 4xz = 0$
  $$\Longleftrightarrow \big(2(i+1)x + (3-2i)y + z\big).\big(2(1-i)x + (3+2i)y + z\big)$$
  De componenten zijn: $2(1+i)x + (3-2i)y + z = 0$ en $2(1-i)x + (3+2i)y + z = 0.$.
  Het dubbelpunt is het reëel eigenlijk punt $(1, 1, -5)$. De kegelsnede ontaardt in **twee toegevoegd imaginaire eigenlijke snijdende rechten**.
  Het dubbelpunt is het enige reëel punt is van de kegelsnede.
  Deze kegelsnede heeft twee toegevoegd imaginaire oneigenlijke punten.
  Deze ontaarde kegelsnede is een **ontaarde ellips**.

- $8x^2 + 18y^2 - 5z^2 - 24xy - 27yz + 18xz = 0 \Longleftrightarrow (2x - 3y + 5z)(4x - 6y - z) = 0.$
  De componenten zijn: $2x - 3y + 5z = 0$ en $4x - 6y - z = 0$.
  Het dubbelpunt is het reëel oneigenlijk punt $(3, 2, 0)$.
  De kegelsnede ontaardt in **twee reële eigenlijke strikt evenwijdige rechten**.
  Deze kegelsnede heeft twee samenvallende reële oneigenlijke punten.
  Deze ontaarde kegelsnede is een **ontaarde parabool**.

- $9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 6yz - 2xz = 0 \Longleftrightarrow (3x + y - z)^2 = 0.$
  De componenten zijn: de rechte $3x + y - z = 0$ dubbel geteld.
  De kegelsnede heeft een rechte van dubbelpunten, nl. de component zelf.
  De kegelsnede ontaardt in **twee reële eigenlijke samenvallende rechten**.
  Deze kegelsnede heeft twee samenvallende reële oneigenlijke punten.
  Deze ontaarde kegelsnede is een **ontaarde parabool**.

- $x^2 + 25y^2 + 2z^2 - 10xy - 10yz + 2xz = 0 \Longleftrightarrow (x - 5y + 1 + i)(x - 5y + 1 - i) = 0$.
  De componenten zijn: $x - 5y + 1 + i = 0$ en $x - 5y + 1 - i = 0$.
  Het dubbelpunt is het reëel oneigenlijk punt $(5, 1, 0)$.
  De kegelsnede ontaardt in **twee toegevoegd imaginaire eigenlijke strikt evenwijdige rechten**.
  Deze kegelsnede heeft twee samenvallende reële oneigenlijke punten.
  Deze ontaarde kegelsnede is een **ontaarde parabool**.

OPGAVEN — 74 Bepaal de aard van de volgende ontaarde kegelsneden. Bepaal met de computer de componenten en het (de) dubbelpunt(en). Ga ook telkens de rang na van D.

(i)	$x^2 + z^2 - 2yz - 2zx + 2xy = 0$	(ii)	$3x^2 + 4z^2 = 0$
(iii)	$2x^2 - y^2 + yz - 2zx + xy = 0$	(iv)	$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = 0$
(v)	$2x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 11yz + 3zx + 3xy = 0$	(vi)	$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2zx + 4xy = 0$
(vii)	$x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = 0$	(viii)	$2x^2 - zx - 4xy = 0$
(ix)	$-6z^2 + 3yz - 4zx + 2xy = 0$	(x)	$-12x^2 + 12y^2 + 35z^2 - 10xy + xz - 44yz = 0$

De kegelsnede is ontaard als en slechts als rang$D < 3$ of als det$D = 0$.
Uit de voorgaande voorbeelden kunnen we besluiten:

1. Is rang$D$=2 dan ontaard de kegelsnede in twee verschillende componenten.
   De kegelsnede heeft één dubbelpunt.

2. Is rang$D$=1 dan ontaard de kegelsnede in twee samenvallende componenten.
   De kegelsnede heeft een rechte van dubbelpunten.

OPGAVEN — 75 Bepaal de rang van D voor de volgende kegelsneden en bepaal de dubbelpunten in geval van ontaarding. Doe de berekeningen met de computer.

(i) $2x^2 - 7y^2 - 27z^2 - 38yz + 4zx + 12xy = 0$;

(ii) $4x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 9yz + 6zx - 12xy = 0$.

(iii) $2x^2 + y^2 - \frac{9}{2}z^2 - 3\sqrt{2}yz + 6zx - 2\sqrt{2}xy = 0$.

76 Bepaal k zodat de kegelsnede $kx^2 - y^2 - yz - kzx - xy = 0$ ontaard is.

77 Bepaal n k en l zodat de kegelsnede $kx^2 + (4 - k)y^2 + 4z^2 + 4yz + 4zx + 2lxy = 0$ ontaard in twee evenwijdige rechten.

78 Ga na of de volgende kegelsneden ontaard zijn. In geval van ontaarding ga de onderlinge ligging na van de componenten en bepaal hun dubbelpunten.

a. $2x^2 - y^2 - 3yz + 3zx - xy = 0$;

b. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36yz - 8zx = 0$;

c. $4x^2 + y^2 - z^2 + 4xy = 0$;

d. $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 0$;

e. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz + 6zx - 4xy = 0$;

f. $ax^2 + a'y^2 + 2b''xy = 0$.

79 Gegeven is de kegelsnede $K : 4x^2 + 6y^2 - 2z^2 - yz - 7xz + 14xy = 0$.
Gevraagd:

a. Toon aan dat K ontaard is;

b. Bepaal de vergelijkingen van de componenten;

80 Bespreek de aard van een kegelsnede die ontaardt in twee verschillende reële componenten.

Oplossingen:
74 (i). $x - z = 0$ en $x + 2y - z = 0$; (ii). $\sqrt{3}x + 2iz = 0$ en $\sqrt{3}x - 2iz = 0$;
(iii). $2x - y = 0$ en $x + y - z = 0$; (iv). $x - y + z = 0$ en $x + y - z = 0$;
(v). $2x - y + 5z = 0$ en $x + 2y - z = 0$; (vi). $x + 2y - z = 0,\ 2\times$ (2 samenvallende componenten);
(vii). $x + iy - z = 0$ en $x - iy - z = 0$; (viii). $x = 0$ en $2x - 4y - z = 0$
(ix). $2x + 3z = 0$ en $y - 2z = 0$; (x). $3x - 2y + 5z = 0$ en $4x + 6y - 7z = 0$.
75 (i) $\Delta = 200$; (ii)rang$D = 2$; (iii)rang$D = 2$;
76 $k = 0$ componenten: $y = 0$ en $x + y + z = 0$; $k = 2$ componenten:$x - y - z = 0$ en $2x + y = 0$.
77 Het koppel (k, l), waarvoor de kegelsnede ontaard is, liggen in een cartesisch k, l-vlak op een cirkel met middelpunt $(2, 1)$ en straal 1.
78 a. $(-1, -1, 1)$; b. niet-ontaard; c. $(1, -2, 0)$; d. $(0, -1, 1)$; e. rechte van dubbelpunten nl. $x - 2y + 3z = 0$; f. $(0, 0, 1)$ als $a'' \neq 0$ en een rechte van dubbelpunten als $a'' = 0$.

4.5 Andere meetkundige definitie van kegelsneden

4.5.1 Correlaties in het projectief vlak

Uit voorgaande paragraaf leren we dat met een collineatie twee matrices corresponderen, namelijk één die de werking op de punten beschrijft en de andere die de werking op de rechten beschrijft. Is de ene matrix F, dan is de andere F^{-t} en omgekeerd.

We beschouwen nu een lineaire afbeelding γ van het projectief vlak naar zijn duale, dat wil zeggen, γ is een bijectie van de puntenverzameling van het projectief vlak naar de puntenverzameling van het duale vlak (dat dus de rechtenverzameling van projectief vlak is) zodanig dat punten die op een rechte liggen afgebeeld worden op punten van het duale vlak die op een rechte liggen. Dus γ beeldt punten van het projectief vlak die op een rechte liggen af op rechten van het projectief vlak die door een punt gaan. Dit wordt als gevolg van de fundamentaalstelling beschreven door een niet-singuliere matrix C, terwijl nu C^{-t} de afbeelding beschrijft van de rechten van het projectief vlak naar de rechten van het duale, dus naar de punten van het projectief vlak, waarbij dus ook nu rechten die door een vast punt gaan worden afgebeeld op punten die op een vaste rechte liggen. Welnu, we noemen zo een afbeelding γ een **correlatie**. Dus γ beeldt het punt met coördinaat (x, y, z) af op de rechte met coördinaat $[u, v, w]$ waarbij

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = C. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

en γ beeldt de rechte met vergelijking $ux + vy + wz = 0$ af op het punt met coördinaat (x, y, z) waarbij

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-t}. \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Een correlatie beeldt een puntenrij af op een stralenbundel en een stralenbundel op een puntenrij.

Voorbeeld: Zoek het beeld van het punt $(1, 1, -1)$ en van de rechte $2x + y + z = 0$ voor de correlatie met matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

OPLOSSING: Het beeld van $(1, 1, -1)$ is de rechte met lijncoördinaat

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Het beeld van het punt $(1, 1, -1)$ is de rechte met vergelijking $2x' + 2y' - z' = 0$.
De inverse matrix van C is

$$C^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Het beeld van de rechte $[2, 1, 1]$ is het punt met coördinaat

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Het beeld van de rechte $2x + y + z = 0$ is het punt $(5, 4, 2)$. Ga nu zelf na dat een punt van de rechte $2x + y + z = 0$ afgebeeld wordt op een rechte door het punt $(5, 4, 2)$.

4.5.2 Polariteiten in het projectief vlak

We kunnen een correlatie ook samenstellen met zichzelf. Als bij die samenstelling alle punten afgebeeld worden op zichzelf dan noemen we die correlatie een **polariteit**.

$$D^{-t} \cdot D = I_3 \Longleftrightarrow (D^t)^{-1} \cdot D = I_3.$$

Hieruit volgt

$$D^t = D$$

Hieruit volgt de stelling:

STELLING 4.1 *Elke polariteit is een collineatie die behoort bij een niet-singuliere symmetrische matrix of elk reëel veelvoud ervan verschillend van nul en omgekeerd, elke niet-singuliere symmetrische matrix of elk reëel veelvoud ervan verschillend van nul behoort bij een polariteit.*

Meetkundige definitie van niet-ontaarde kegelsnede in het projectief vlak

Hernemen we de vergelijking van een kegelsnede:

$$K : X^t \cdot D \cdot X = 0$$

De matrix D van een niet-ontaarde kegelsnede is de matrix van een polariteit vermits deze matrix niet-singulier is en symmetrisch.
Behoort een punt $P(X_1)$ tot K dan geldt

$$X_1^t \cdot D \cdot X_1 = 0 \tag{4.6}$$

$$D \cdot X_1 = U_1$$

is de lijncoördinaat van het beeld van $P(X_1)$ voor de polariteit met matrix D. Drukken we dit uit in de gelijkheid 4.6 dan geldt

$$X_1^t \cdot U_1 = 0$$

Dit betekent dat het punt $P(X_1)$ behoort tot de rechte met vergelijking

$$X^t \cdot U_1 = 0$$

en dus behoort tot zijn beeld.
We kunnen nu de kegelsnede als volgt meetkundig definiëren:
Een niet-ontaarde kegelsnede met matrix D is de meetkundige plaats van de punten die op hun beeld liggen voor de polariteit met matrix D.

Beschouwen we een rechte U_1 dan is het beeld $D^{-1} \cdot U_1 = X_1$. Drukken we deze gelijkheid uit in 4.6 dan verkrijgen we:

$$(D^{-1} \cdot U_1)^t \cdot D \cdot (D^{-1} \cdot U_1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(U_1^t \cdot D^{-t}) \cdot D \cdot (D^{-1} \cdot U_1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$U_1^t \cdot (D^{-t} \cdot D \cdot D^{-1}) \cdot U_1 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$U_1^t \cdot (D^{-t} \cdot I) \cdot U_1 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$U_1^t \cdot D^{-1} \cdot U_1 = 0$$

De lijncoördinaat U_1 van het beeld van een punt X_1 van K voldoet aan de vergelijking:

$$U^t \cdot D^{-1} \cdot U = 0 \tag{4.7}$$

4.6 Pool en poollijn t.o.v. een kegelsnede

4.6.1 Poollijn van een punt t.o.v. een niet-ontaarde kegelsnede

De **poollijn van een punt** X_1 t.o.v. een niet-ontaarde kegelsnede met matrix D is de rechte met lijncoördinaat $D \cdot X_1$. De vergelijking van de poollijn van X_1 is

$$X^t \cdot D \cdot X_1 = 0 \tag{4.8}$$

Als we beide leden van 4.8 transponeren verkrijgen we

$$X_1^t \cdot D \cdot X = 0 \tag{4.9}$$

$\boxed{\text{Andere gedaante voor de vergelijking van de poollijn}}$

$\varphi(x, y, z)$ is een kwadratische functie in drie veranderlijken x, y en z.
De **partiële afgeleide naar** x **van** $\varphi(x, y, z)$ is de afgeleide functie van $\varphi(x, y, z)$ gezien als functie van de veranderlijke x terwijl de y en z bij het afleiden als constanten worden beschouwd.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z$$

Analoog voor de twee andere partiële afgeleiden.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2a_{13}x + 2a_{23}y + 2a_{33}z$$

De vergelijking 4.9 werken we gedeeltelijk uit:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{4.10}$$

De vergelijking 4.10 is de gedaante met partiële afgeleiden van de vergelijking van de poollijn.

1. Behoort een punt tot een kegelsnede dan is de poollijn van dat punt t.o.v. de kegelsnede de raaklijn in dat punt aan de kegelsnede.
   De vergelijking 4.7 is de **tangentiële vergelijking van** K.

2. Behoort een punt niet tot een kegelsnede dan is de poollijn van dat punt t.o.v. de kegelsnede de raakkoorde van de raaklijnen uit dat punt aan de kegelsnede.

Voorbeelden:

- Gegeven is de kegelsnede $K : 2x^2 + 3y^2 + 7z^2 + yz - 4xz - 5xy = 0$.
  Gevraagd is de poollijn van het punt $(1, 0, -2)$ t.o.v. K.

  OPLOSSING: We bepalen eerst de matrix D van de kegelsnede:

  $$D = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 3 & 1/2 \\ -2 & 1/2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ -5 & 6 & 1 \\ -4 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

  De lijncoördinaat van de poollijn van het punt $(1, 0, -2)$ is

  $$\begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 3 & 1/2 \\ -2 & 1/2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7/2 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

  De vergelijking van de poollijn is:

  $$6x - \frac{7}{2}y - 16z = 0.$$

- Gegeven is de kegelsnede $K : y = 2x^2 + 9x + 4$.
  Gevraagd is de poollijn van punt $B(18, 49, -8)$ t.o.v. K.
  OPLOSSING:
  We starten met het opschrijven van de matrix D van $2x^2 + 9x - y + 4 = 0$:

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

  De poollijn van B is

  $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 49 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 49 \end{pmatrix}$$

  De poollijn is de rechte met vergelijking $8y + 49 = 0$. Dit is een rechte evenwijdig met de x-as. Inderdaad, het gegeven punt is de top van de parabool en de raaklijn in de top is evenwijdig met de x-as.

- Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(1, -2, 1)$ aan de kegelsnede $K : x^2 + y^2 - 5z^2 + 4yz + 4xz - 2xy = 0$.
  OPLOSSING: De matrix behorende bij de kegelsnede is:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

  De raaklijn in $(1, -2, 1)$ is de poollijn van het punt $(1, -2, 1)$ t.o.v. K

$$1.(x - y + 2z) - 2(-x + y + 2z) + 1.(2x + 2y - 5z) = 0 \Longleftrightarrow 5x - y - 7z = 0.$$

- Bepaal h en k opdat de kegelsnede $K : 2x^2 + hxy + y^2 + kxz = 0$ zou raken aan de rechte $A : x - y + z = 0$ in het punt $(1, 1, 0)$.
  OPLOSSING: De poollijn van $(1, 1, 0)$ t.o.v. K (of de raaklijn in $(1, 1, 0)$ aan K) moet de rechte A zijn.

$$(4x + hy + kz) + (hx + 2y) = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 0.$$

$$(4 + h)x + (h + 2)y + kz \Longleftrightarrow x - y + z = 0.$$

  De coëfficiënten van de corresponderende termen moeten evenredig zijn.

$$\begin{cases} 4 + h = r \\ h + 2 = -r \\ k = r \end{cases} .$$

  We elimineren eerst r en we krijgen

$$\begin{cases} 4 + h = k \\ h + 2 = -k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ h = -3 \end{cases} .$$

  We substitueren deze waarden in de vergelijking van K

$$K : 2x^2 - 3xy + y^2 + xz = 0.$$

OPGAVEN — **81** Bepaal de poollijn van elk van de volgende punten: $(2, 3, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -2, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ t.o.v. de kegelsneden met vergelijking

a. $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$;

b. $y^2 = 4xz$;

c. $xy - 3xz + 4yz - z^2 = 0$.

82 Bepaal a, a' en a'' zodanig dat de rechte $x+y+z=0$ de poollijn is van het punt $(2,-1,1)$ t.o.v. de kegelsnede $ax^2+a'y^2+a''z^2=0$.

83 Bepaal de poollijn van het punt A t.o.v. de kegelsnede K.

a. $K: -2x^2+y^2-8z^2+4yz+10xz+2xy=0$ en $A(2,-1,1)$;

b. $K: 2x^2+y^2-z^2+xz-3xy=0$ en $A(0,2,-3)$.

84 Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de kegelsnede K in de snijpunten van K met de zijden van de gronddriehoek.

$$K: 3x^2+2y^2-6z^2-4yz-3zx+6xy=0.$$

85 Stel de voorwaarde op waaraan de coëfficiënten van de vergelijking van een kegelsnede moeten voldoen opdat de kegelsnede zou raken in O_1 aan de zijde O_1O_2 van de gronddriehoek.

86 Bepaal de waarde van de parameter h zodat de rechte a raakt aan de kegelsnede K. Bepaal tevens de raakpunten.

a. $K: 4x^2-y^2+z^2+2xz=0$ en $a: x-y-hz=0$;

b. $K: x^2+y^2-2z^2-yz+xz+2hxy=0$ en $a: x+y+z=0$.

87 Stel de voorwaarde op waaraan de coëfficiënten van de vergelijking van een kegelsnede moeten voldoen opdat de kegelsnede zou raken aan de zijde O_1O_2 van de gronddriehoek.

88 Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen

a. uit het punt $E(1,1,1)$ aan de kegelsnede $K: x^2+2y^2+4z^2-6yz-4zx+4xy=0$;

b. uit het punt $O_3(0,0,1)$ aan de kegelsnede $K: 9x^2+4y^2+36z^2-24yz-36zx+11xy=0$.

89 Gegeven zijn de twee niet-ontaarde kegelsneden $K_1: x^2-2yz=0$ en $K_2: x^2+y^2-2xz=0$. Gevraagd: Bepaal de meetkundige plaats van het punt P waarvoor de poollijn t.o.v. K_1 raaklijn is aan K_2.

Oplossingen:

84 met $x=0$: $(0,3,1)$ $15x+8y-24z=0$ en $(0,-1,1)$ $9x+8y+8z=0$;
met $y=0$: $(2,0,1)$ $9x+8y-18z=0$ en $(-1,0,1)$ $9x+10y+9z=0$; met $z=0$: $(-3+\sqrt{3},3,0)$ $6x+(6-2\sqrt{3})y-(\sqrt{3}+3)z=0$ en $(-3-\sqrt{3},3,0)$ $6x+(6+2\sqrt{3})y+(\sqrt{3}-3)z=0$. 85 $a=0$ en $b''=0$.
87 $A_{33}=0$. 88 a. $y=z$ en $2x+y-3z=0$;
b. $x=0$ en $y=0$.
89 $y^2-z^2-2xy=0$;

4.6.2 Pool van een rechte t.o.v. een niet-ontaarde kegelsnede

De **pool van een rechte** U_1 t.o.v. een niet-ontaarde kegelsnede met matrix D is het punt met coördinaat $D^{-1} \cdot U_1 = 0$.

1. Is een rechte raaklijn aan een kegelsnede dan is de pool van die rechte t.o.v. de kegelsnede het raakpunt van die raaklijn aan de kegelsnede.
2. Is een rechte geen raaklijn aan een kegelsnede dan is de pool van die rechte t.o.v. de kegelsnede het punt waarvoor de rechte de raakkoorde is van de raaklijnen uit dat punt aan de kegelsnede.

Voorbeeld:
Gegeven is de kegelsnede $K : 2x^2 + 3y^2 + 7z^2 + yz - 4xz - 5xy = 0$.
Gevraagd is de pool van de rechte $x - y + 3z = 0$.
Oplossing:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 3 & 1/2 \\ -2 & 1/2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{37} \begin{pmatrix} 83 & 66 & 19 \\ 66 & 40 & 16 \\ 19 & 16 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dus de pool van de rechte met vergelijking $x-y+3z = 0$ (deze rechte heeft lijncoördinaat $[1, -1, 3]$) is

$$\begin{pmatrix} 83 & 66 & 19 \\ 66 & 40 & 16 \\ 19 & 16 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 74 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

OPGAVEN — 90 Bepaal de pool van de rechte a t.o.v. de kegelsnede K.

a. $a : x = 0$ en $K : x^2 + y^2 - z^2 + 2zx - 2xy = 0$;

b. $a : x + y + 2z = 0$ en $K : 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2xy = 0$.

91 Bepaal de waarde van de parameter h zodat het punt A de pool is van de rechte a t.o.v. de kegelsnede K.

a. $K : 3x^2 + 2y^2 - 7z^2 + hyz - 2hxz - 2xy = 0$, $a : 7x - 3y + 15z = 0$ en $A(1, -1, 3)$;

b. $K : -3x^2 - z^2 + (h + 1)xz + hxy = 0$, $a : 5x + 4y + z = 0$ en $A(2, 1, -2)$.

92 Bepaal de meetkundige plaats van de polen van de rechte $a : 3x - 2y - z = 0$ t.o.v. de kegelsnede $K : x^2 + ky^2 + z^2 + kyz + 4xz + 2xy = 0$.

93 Bepaal de meetkundige plaats van de polen van de raaklijnen aan $K_1 : 2xy - y^2 + z^2 = 0$ t.o.v. de kegelsnede $K_2 : x^2 - 2yz = 0$.

94 De rechte t is een veranderlijke raaklijn aan de kegelsnede met vergelijking $z^2 = 4xy$. Bepaal de meetkundige plaats van de pool van de rechte t t.o.v. de kegelsnede met vergelijking $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

Onderzoeksopdracht ⊛ **95** Onderzoek de begrippen pool en poollijn t.o.v. een ontaarde kegelsnede. Wat is hier de betekenis van kern en beeld van de singuliere matrix D.

Oplossingen:
90 a. $(1, 1, 1)$; b. $(1, 1, 1)$. 91 a. $h = 6$; b. $h = -4$. 92 $10z^2 + 18xy + 14xz + 14yz = 0$; 94 $z^2 + xy = 0$;

4.6.3 Middellijn en middelpunt van een niet-ontaarde kegelsnede

Een **middelpunt van een kegelsnede** is een pool van de oneigenlijke rechte r_∞ t.o.v. die kegelsnede.
Als pool van een reële rechte, is een middelpunt steeds een reëel punt.

Een **middellijn van een kegelsnede** is een poollijn van een oneigenlijk punt P_∞ t.o.v. die kegelsnede.
Oneigenlijke punten kunnen reëel of imaginair zijn. Middellijnen kunnen dus zowel reëel als imaginair zijn.

De pool van een middellijn noemen we de **toegevoegde richting van die middellijn**. De richting van een middellijn en haar toegevoegde richting worden **toegevoegde richtingen t.o.v. de kegelsnede** genoemd.

Een **asymptoot van een kegelsnede** is een raaklijn in een oneigenlijk punt A_∞ van de kegelsnede. De oneigenlijke punten van een kegelsnede worden daarom de **asymptotische richtingen van de kegelsnede** genoemd.

Een asymptoot is een middellijn die toegevoegd is aan haar eigen richting.

OPGAVEN — **96** Bepaal de parameters h en k zo dat de kegelsnede $K : 2x^2 + hxy + y^2 + kx + h = 0$ de rechte $d : 6x + 5y - 3 = 0$ als middellijn, met pool $(1, 2, 0)$, heeft.

97 Gegeven $K : 2x^2 + xy - y^2 - 2x - 5y + 1 = 0$.
Gevraagd:

a. Het middelpunt van K;

b. De middellijn met pool de richting van $d : y = 2(x-1)$;

c. De middellijn die door $P(5,-4)$ gaat;

d. De middellijn parallel met $d : y = x + 5$.

98 a. Wanneer is de x-as een middellijn met pool(1,1,0) t.o.v. de kegelsnede $K : \varphi(x, y, z) = 0$?

b. Zelfde vraag voor de y-as.

99 Bepaal het middelpunt van de volgende kegelsneden:

a. $x^2 + xy + y^2 - 6x - 3 = 0$;

b. $xy + 2b'x + 2by = 0$;

c. $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x + y + 7 = 0$;

d. $y = ax^2 + bx + c$.

100 Stel de vergelijking op van de kegelsnede die de oorsprong als middelpunt heeft en die door de punten met coördinaat $(1,0)$, $(0,1)$ en $(1,1)$ gaat.

101 Bepaal a en b zo, dat $M(2,3)$ het middelpunt is van de kegelsnede $(b+1)x^2 - axy + by^2 + 23x - 2y - 20 = 0$.

102 Zoek de asymptoten van de volgende kegelsneden op één van de vier manieren:

a. $2x^2 - xy - y^2 + x - y + 1 = 0$;

b. $34x^2 - 17xy + 59x + 13y - 65 = 0$;

c. $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

d. $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + y + 10 = 0$;

e. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y = 0$;

f. $x^2 + 5xy + 1 = 0$;

g. $x^2 - y^2 + 6y + 2 = 0$;

h. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 2y + 3x - 9 = 0$;

i. $2x^2 - 5xy - 2y + 3x - 8 = 0$;

j. $xy - 3y - 2x + +14 = 0$;

k. $x^2 - y^2 + 2ax + 4a^2 = 0$;

103 Bepaal a zodat één van de asymptoten van de kegelsnede $K : ax^2 - xy + 2y^2 - x + 2y = 0$ parallel is met de rechte met vergelijking $y = 2x$. Bepaal daarna, voor de gevonden a-waarde, de vergelijking van elke asymptoot.

104 Wanneer heeft de kegelsnede met vergelijking $\varphi(x, y, z) = 0$

a. de x-as als asymptoot?

b. de y-as als asymptoot?

c. de rechte met vergelijking $y = x$ als asymptoot?

105 Gegeven de kegelsnede $K : 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.
Gevraagd:

(i) De aard van K (δ, Δ);

(ii) De asymptoten van K;

(iii) De snijpunten van K met de coördinaatassen;

(iv) Het middelpunt van K;

(v) Teken K;

106 Gegeven de kegelsnede $K : 3x^2 - 2xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$.
Gevraagd:

(i) De aard van K (δ, Δ);

(ii) De asymptoten van K;

(iii) De snijpunten van K met de coördinaatassen;

(iv) De pool van de rechte $x = 2$ t.o.v. K;

(v) Het middelpunt van K;

(vi) De raaklijn in $(1, 1)$ aan K;

(vii) Schets K met zoveel mogelijk juiste punten (uit voorgaande afgeleid);

Onderzoeksopdracht ⊛ **107** Onderzoek meetkundig het aantal middelpunten van een niet-ontaarde kegelsnede. Maak een bespreking al naar gelang de aard van de kegelsnede.

Onderzoeksopdracht ⊛ **108** Bespreek uitvoerig wat middellijnen en middelpunten zijn bij ontaarde kegelsneden.

Oplossingen:
96 $h = 1$ en $k = -3$;
97 a. $(1, -2)$; b. $2x - y - 4 = 0$ c. $x + 2y + 3 = 0$; d. $y = x - 3$.
98 a. $a_{11} + a_{12} = 0$ en $a_{23} + a_{13} = 0$; b. $a_{22} + a_{12} = 0$ en $a_{23} + a_{13} = 0$;
99 a. $(4, -2)$; b. $(-2b, -2b')$; c. $(-19, -16)$; d. $(0, 1.0)$.
100 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$.

101 $a = 17$ en $b = 6$.
102

a.	$x = y \vee 2x + y + 1 = 0$	*g.*	$x - y + 3 = 0 \vee x + y - 3 = 0$
b.	$y = \frac{11}{37} \vee 2x - y + 5 = 0$	*h.*	$6x - 3y + 1 = 0 \vee 3x - 6y + 4 = 0$
c.	$x + iy = 0 \vee x - iy = 0$	*i.*	$10x - 25y + 11 = 0 \vee x = -\frac{2}{5}$
d.	$2ix + (1-i)y + 3 + 2i = 0 \vee -2ix + (1+i)y + 3 - 2i = 0$	*j.*	$x = 3 \vee y = 2$
e.	$z = 0(2x)$	*k.*	$y = x + a \vee y = -(x + a)$
f.	$x = 0enx + 5y = 0$		

103 $a = -6$, asymptoten: $-14x + 7y + 3 = 0$ en 21x+ 14y+ 8 = 0.

104 a. $a_{11} = a_{13} = 0$; b. $a_{22} = a_{23} = 0$ c. $a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 0$ en $a_{13} + a_{23} = 0$.

105 (i) ellips, (ii) $2x \pm 3iy = 0$, (iii) $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$, (iv) O.

4.6.4 Toegevoegde richtingen t.o.v. een kegelsnede

Twee richtingen $(l_1, m_1, 0)$ en $(l_2, m_2, 0)$ zijn toegevoegd t.o.v. de kegelsnede als de ene richting behoort tot de poollijn van de andere richting.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

is de lijncoördinaat van de poollijn van $(l_1, m_1, 0)$. De vergelijking van deze poollijn is

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Het punt $(l_2, m_2, 0)$ behoort tot die poollijn als en slechts als

$$\begin{pmatrix} l_2 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0$$

OPGAVEN — 109 Bepaal de parameter k zo, dat de kegelsnede $K : x^2 - 2xy + 3y^2 - kx + 2y + k^2 = 0$ de rechte $d : x + y + k = 0$ als middellijn heeft.

OPLOSSINGEN:

109 $k = 0,5$

4.6.5 Assen en toppen van een niet-ontaarde kegelsnede

Een **hoofdrichting van een kegelsnede** is een richting die loodrecht staat op haar toegevoegde richting t.o.v. de kegelsnede.
Een **as van een kegelsnede** is een eigenlijke middellijn die loodrecht staat op haar toegevoegde richting.
Een **top van een kegelsnede** is een eigenlijk snijpunt van een as met de kegelsnede en een **topraaklijn van een kegelsnede** is de raaklijn in een top van de kegelsnede aan de kegelsnede.
De topraaklijnen van een kegelsnede staan loodrecht op de corresponderende as.

Opsporen van hoofdrichtingen, assen en toppen Is $(l, m, 0)$ een hoofdrichting van een kegelsnede K dan is die richting toegevoegd aan haar loodrechte richting $(-m, l, 0)$.

$$\begin{pmatrix} -m & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0$$

Stel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en substitueren we dat in de eerste gelijkheid

$$\begin{pmatrix} -m & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Vermits $(l, m) \neq (0, 0)$ zijn de oplossingen van deze homogene lineaire vergelijking in x en y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad \text{met } \lambda \neq 0$$

Substitueren we dat terug in de tweede gelijkheid dan verkrijgen we:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

Dit laatste betekent dan de vector (l, m) een eigenvector is van de matrix R met eigenwaarde λ.
De karakteristieke vergelijking voor de eigenwaarden van R is

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

R heeft steeds twee reële eigenwaarden vermits de discriminant:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

OPGAVEN — 110 Bepaal de assen en de toppen van de volgende kegelsneden:
(a) $4x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 1 = 0$; (b) $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4x + 4\sqrt{3}y - 4 = 0$
(c) $y^2 = 2(x-3)$; (d) $3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$
(e) $x^2 + 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x + 10 = 0$;

$\boxed{\textbf{Onderzoeksopdracht}}$ ⊛ **111** 1. Voor welke soort kegelsnede heeft de matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ twee samenvallende eigenwaarden? Maak een meetkundige analyse van dat feit.

2. Onderzoek meetkundig het aantal assen van een niet-ontaarde kegelsnede. Maak een bespreking al naar gelang de aard van de kegelsnede.

Oplossingen:

110 a. niet-ontaarde parabool; as: $2x - y - 1 = 0$; top: $(2/5, -1/5)$;
b. niet-ontaarde hyperbool; hoofdas: $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$; reële toppen: $(\sqrt{3} - 2, 1)$ en $(-\sqrt{3} - 2, -1)$; nevenas: $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$; imaginaire toppen: $(i - 2, -\sqrt{3}i)$ en $(-2 - i, \sqrt{3}i)$;
c. niet ontaarde parabool; as: x-as; top: $(3, 0)$;
d. reële niet-ontaarde ellips;
grote as: $(1 + \sqrt{2})x + y - \sqrt{2} + 3 = 0$; toppen $(1 - \sqrt{3}, \sqrt{6} + \sqrt{3} - 4)$ en $(\sqrt{3} + 1, -\sqrt{6} - \sqrt{3} - 4)$;
kleine as: $(1 - \sqrt{2})x + y + \sqrt{2} + 3 = 0$; toppen: $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{6} - \sqrt{3} - 4)$ en $(1 - \sqrt{3}, -\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4)$;
e. niet-ontaarde parabool: as: $x + y = \sqrt{2}$; top: $(3/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

4.6.6 Brandpunten en richtlijnen van een niet-ontaarde kegelsnede

Herhaling: Ellips - hyperbool - parabool

- *De ellips is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de som van de afstanden tot twee vaste punten F_1 en F_2 gelijk is aan $2a$.*
  De punten F_1 en F_2 zijn de **reële brandpunten van de ellips**. De afstand tussen de reële brandpunten is $|F_1F_2| = 2c$ en er geldt dat $a > c$. We stellen

  $$a^2 - c^2 = b^2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a > b.$$

  Kiezen we voor de orthonormale basis, de x-as langs F_1F_2, de oorsprong in het midden van $[F_1F_2]$ en de y-as door O loodrecht op de x-as dan is de vergelijking van de ellips

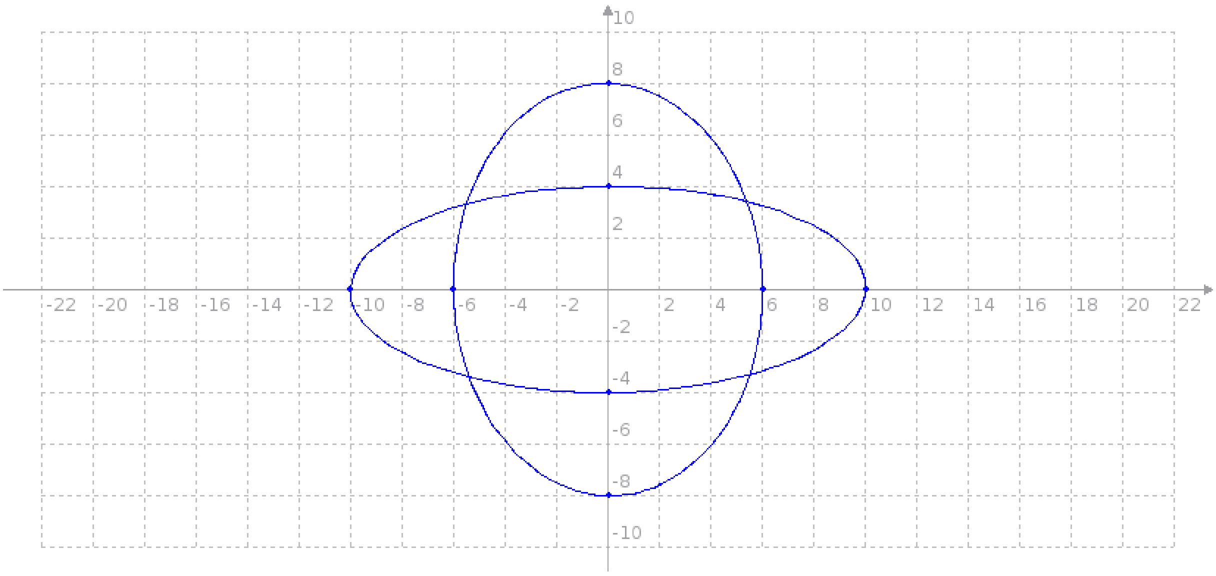
  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ met } a > b$$

  De reële brandpunten liggen op de x-as: $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$

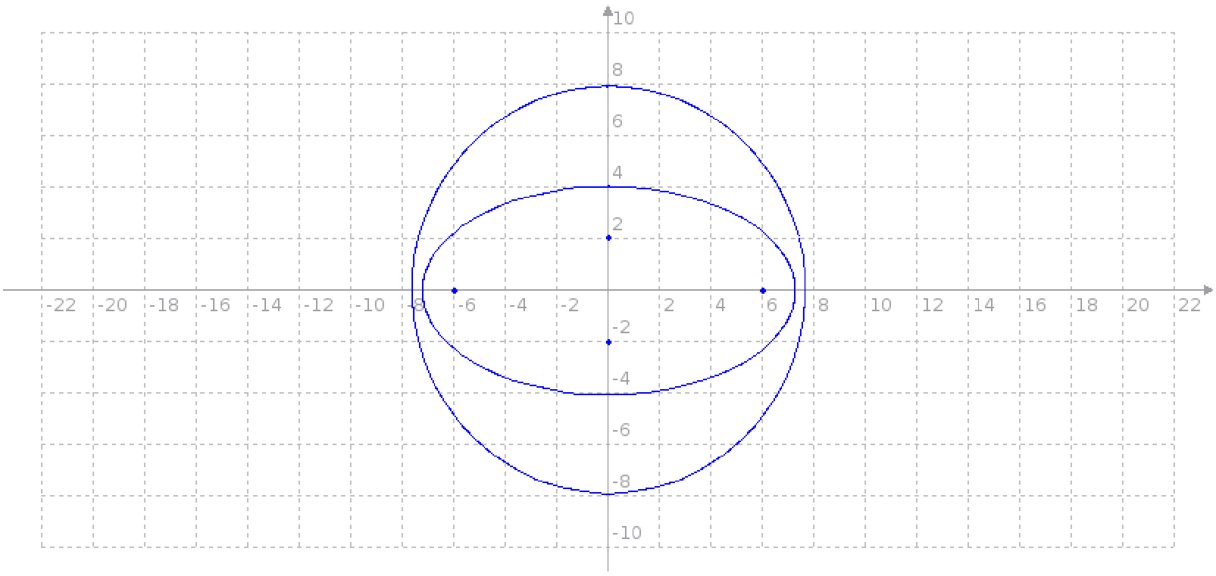
  Is $a < b$ in de vergelijking van de ellips dan liggen de reële brandpunten op de y-as:

  $$F_1(0, c) \text{ en } F_2(0, -c) \text{ met } b^2 = c^2 + a^2$$

  De rechthoek met afmetingen $2a$ en $2b$ wordt de **assenrechthoek van de ellips** genoemd. De middenparallellen van de assenrechthoek zijn de assen van de ellips. De as waar de reële brandpunten op liggen, wordt de **grote as van de ellips** en de andere as is de **kleine as van de ellips**.
  De snijpunten van de assen met de ellips zijn de vier **reële toppen van de ellips**.
  De zijden van de assenrechthoek zijn de vier **topraaklijnen van de ellips**.



OPGAVEN — 112 Bepaal de vergelijkingen van de ellipsen - construeer de brandpunten



OPGAVEN — 113 Bepaal de vergelijkingen van deze ellipsen met gegeven brandpunten

- *De hyperbool is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de absolute waarde van de afstanden tot twee vaste punten F_1 en F_2 gelijk is aan $2a$.*
  De punten F_1 en F_2 zijn de **reële brandpunten van de hyperbool**. De afstand tussen de brandpunten is $|F_1F_2| = 2c$ en er geldt dat $a < c$. We stellen

  $$c^2 - a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

  Kiezen we voor de orthonormale basis, de x-as langs F_1F_2, de oorsprong in het midden van $[F_1F_2]$ en de y-as door O loodrecht op de x-as dan is de vergelijking van de hyperbool

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  De reële brandpunten liggen op de x-as: $F_1(c, 0)$ en $F_2(-c, 0)$

  Liggen de reële brandpunten van de hyperbool op de y-as dan is de vergelijking van de hyperbool

  $$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  en de brandpunten hebben als coördinaten

  $$F_1(0, c) \text{ en } F_2(0, -c) \text{ met } a^2 + b^2 = c^2$$

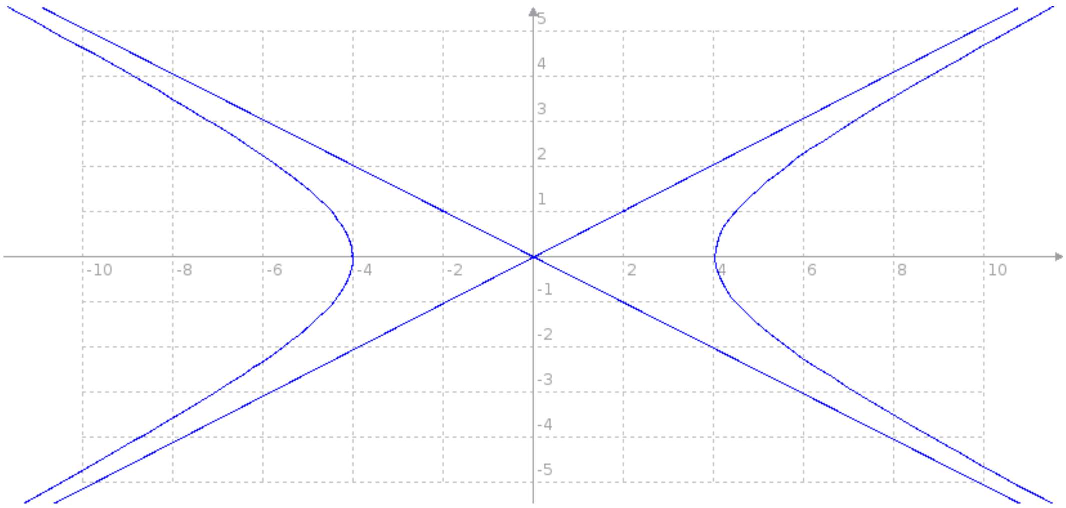
  De vergelijking

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Longleftrightarrow (\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0$$

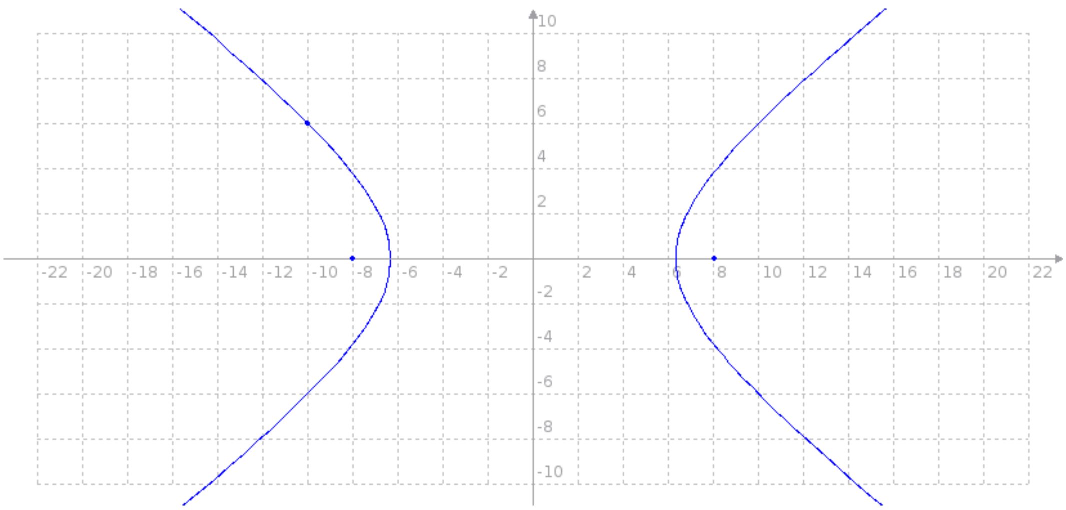
  is de unie van **de twee asymptoten van de hyperbool**.

  $$y = \frac{b}{a}x \text{ en } y = -\frac{b}{a}x$$

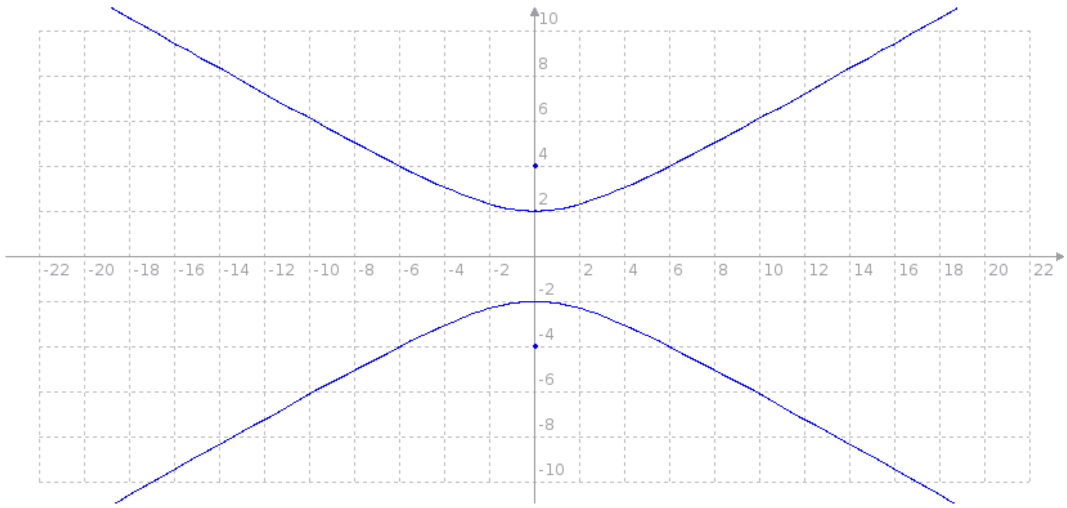
  De asymptoten zijn de diagonalen van de zogenaamde **assenrechthoek** met zijden $2a$ en $2b$. De middenparallellen van de assenrechthoek zijn de assen van de hyperbool. We noemen de as van de reële brandpunten de **hoofdas van de hyperbool** en de andere as is de **nevenas van de hyperbool**. De snijpunten van de hoofdas met de hyperbool zijn de twee **reële toppen van de hyperbool**. De zijden van de assenrechthoek door de toppen zijn de twee **reële topraaklijnen van de hyperbool**.



OPGAVEN — 114 Bepaal de vergelijking van deze hyperbool en construeer de brandpunten



OPGAVEN — 115 Bepaal de vergelijking van deze hyperbool met gegeven brandpunten



OPGAVEN — 116 Bepaal de vergelijking van deze hyperbool met gegeven brandpunten

- *De parabool is de meetkundige plaats van de punten waarvoor de afstand tot een vast punt F gelijk is aan de afstand tot een vaste rechte d.*
Het punt F wordt het **brandpunt van de parabool** genoemd en de rechte d de **richtlijn van de parabool**. De afstand tussen brandpunt en richtlijn is $\boldsymbol{d}(F, d) = p$.

We kiezen voor de orthonormale basis de x-as door het brandpunt F loodrecht op de richtlijn d. We noemen het voetpunt van die loodlijn G. De oorsprong kiezen we in het midden van $[FG]$ en de y-as door O loodrecht op de x-as. De vergelijking van de parabool is

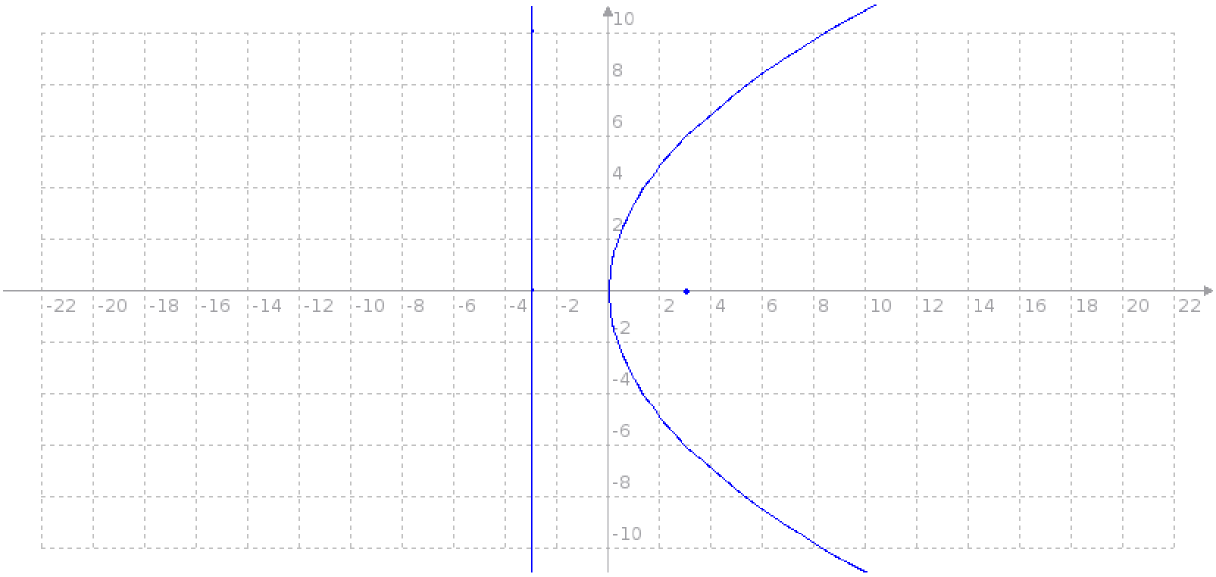
$$y^2 = 2px$$

De x-as is de **as van de parabool**. Het brandpunt ligt op de as van de parabool en heeft als coördinaat $F(\frac{p}{2}, 0)$. Het snijpunt van de as met de parabool wordt de **top van de parabool** genoemd en de raaklijn in de top aan de parabool wordt de **topraaklijn van de parabool** genoemd. De waarde $2p$ is de **hoofdparameter van de parabool**. De hoofdparameter is de lengte van de koorde afgesneden door de loodlijn op de as door het brandpunt. De hoofdparameter is een maat voor de breedte van de parabool. Inderdaad,

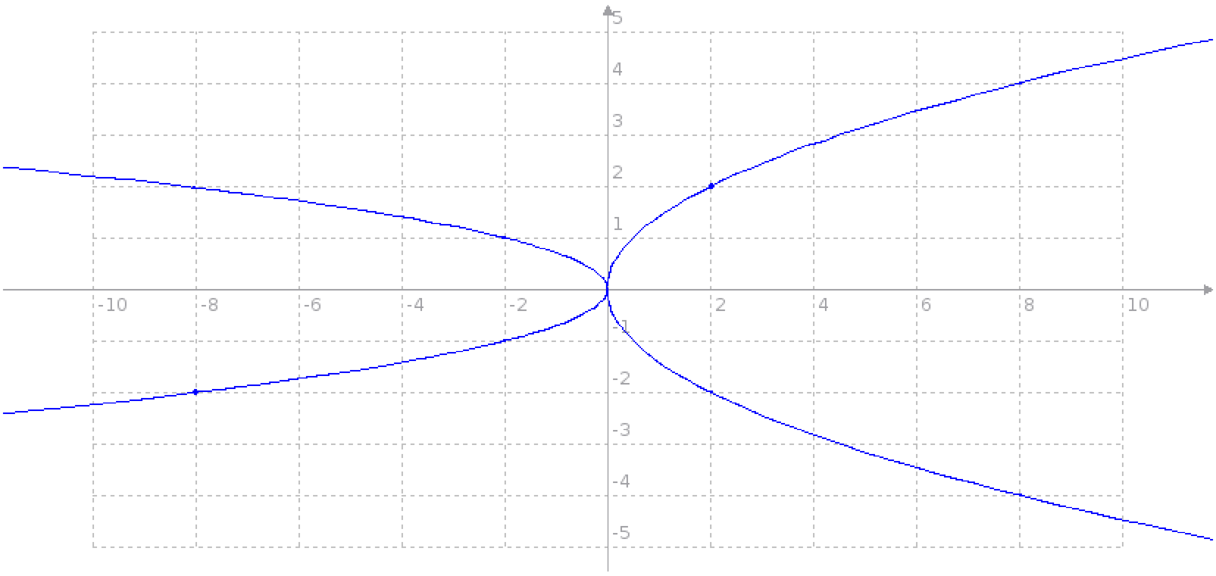
$$\left\{\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ x = \frac{p}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = 2p\frac{p}{2} \\ x = \frac{p}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = p^2 \\ x = \frac{p}{2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = p \\ x = \frac{p}{2} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} y = -p \\ x = \frac{p}{2} \end{array}\right.$$

De lengte van de koorde met eindpunten $(\frac{p}{2}, p)$ en $(\frac{p}{2}, -p)$ is $p - (-p) = 2p$.



OPGAVEN — 117 Bepaal de vergelijking van deze parabool met gegeven brandpunt



OPGAVEN — 118 Bepaal de vergelijking van de parabolen, duid de brandpunten aan en teken de richtlijnen

Onderzoeksopdracht ⊛ **119** 1. Onderzoek uitvoerig de cirkel als kegelsnede.

2. Toon aan dat bij de niet-ontaarde kegelsneden de unie van de raaklijnen uit een brandpunt aan de kegelsnede een ontaarde cirkel is. Toon dan ook aan dat de richtlijn de poollijn is van het brandpunt.

4.7 Transformaties van kegelsneden

1. Projectief
   De transformatieformules van een collineatie zijn in matrixgedaante:

   $$X' = F \cdot X \text{ met } \det F \neq 0 \Longleftrightarrow X = F^{-1} \cdot X'.$$

   De vergelijking van een kegelsnede is in matrixgedaante:

   $$X^t \cdot D \cdot X = 0.$$

   We onderwerpen de kegelsnede aan die collineatie.
   De vergelijking van de beeldkromme is:

   $$(F^{-1} \cdot X')^t \cdot D \cdot (F^{-1} \cdot X') \overset{(F^{-1})^t = (F^t)^{-1} = F^{-t}}{\Longleftrightarrow} (X'^t \cdot F^{-t}) \cdot D \cdot (F^{-1} . X') \Longleftrightarrow X'^t (F^{-t} \cdot D \cdot F^{-1}) \cdot X'.$$

   De matrix van het beeld van de kegelsnede is:

   $$D' = F^{-t} \cdot D \cdot F^{-1}.$$

   De matrices D' en D worden **congruente matrices** genoemd.

   - $(D')^t = (F^{-t} \cdot D \cdot F^{-1})^t = F^{-t} \cdot D^t \cdot (F^{-t})^t = F^{-t} \cdot D \cdot F^{-1} = D' \quad (D^t = D)$.
     De matrix D' is een symmetrische matrix. Uiteraard stelt de beeldkromme een kegelsnede voor.
   - $\Delta' = \det D = \det(F^{-t} \cdot D \cdot F^{-1}) = \det F^{-t}\, \Delta\, \det F^{-1} = (\det(F^{-1}))^2\, \Delta$
     vermits $\det F^{-t} = \det F^{-1}$.
     Uit dit laatste volgt dat het al dan niet nul-zijn van Δ onder een collineatie niet verandert.

   Invarianten van een collineatie:

   - de incidentie: inderdaad voor een collineatie geldt als een punt behoort tot een rechte dan behoort het beeld van dat punt tot het beeld van die rechte.
   - het reëel-zijn van een punt en van een rechte.
   - het kegelsnede-zijn.
   - het ontaard zijn van een kegelsnede: inderdaad het teken van Δ verandert niet onder een collineatie.
   - pool en poollijn t.o.v. een kegelsnede.

2. Affien
   De transformatieformules voor een lineaire permutatie zijn

$$X' = F \cdot X \overset{\det F \neq 0}{\Longleftrightarrow} X = F^{-1} \cdot X'$$

   De vergelijking van een kegelsnede in het affien vlak

$$X^t \cdot R \cdot X + 2A^t \cdot X + a_{33} = 0.$$

   We onderwerpen de kegelsnede aan de lineaire permutatie:

$$(F^{-1} \cdot X')^t \cdot R \cdot (F^{-1} \cdot X') + 2A^t \cdot (F^{-1} \cdot X') + a_{33} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(X'^t \cdot F^{-t}) \cdot R \cdot (F^{-1} \cdot X') + 2A^t \cdot (F^{-1} \cdot X') + a_{33} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X'^t \cdot (F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1}) \cdot X' + 2(A^t \cdot F^{-1}) \cdot X' + a_{33} = 0$$

   Alleen de eerste term van de nieuwe matriciële vergelijking bevat de kwadratische termen x'^2, y'^2 en $x'y'$. De matrix R' van de nieuwe vergelijking is

$$R' = F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1}.$$

   - $R'^t = (F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1})^t = F^{-t} \cdot R^t \cdot (F^{-t})^t = F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1} = R'$
     vermits $R^t = R$.
     Hieruit volgt dat R' een symmetrische matrix is.
   - $\delta' = \det R' = \det(F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1}) = \det F^{-t}\, \delta \, \det F^{-1} = (\det F^{-1})^2\, \delta$
     vermits $\det F^{-t} = \det F^{-1}$.
     Uit dit laatste volgt dat het teken en het al dan niet nul-zijn van δ bij een lineaire permutatie niet verandert.

   Invarianten van een affiene transformatie:

   - de evenwijdigheid van rechten;
   - de deelverhouding $\longrightarrow$ behoud van het midden van een lijnstuk;
   - de aard van de asymptotische richtingen van een kegelsnede
     $\longrightarrow$ behoud van de aard van een kegelsnede;
   - het middelpunt van een kegelsnede;
   - toegevoegde richtingen t.o.v. een kegelsnede;
   - toegevoegde middellijnen van een kegelsnede;

- de asymptoten van een kegelsnede.

3. Euclidisch
Een **orthogonale transformatie van het euclidisch vlak** is een collineatie van het gecompleteerd euclidisch vlak die het scalair product behoudt. Een orthogonale transformatie is de samenstelling van een rotatie om O of een loodrechte spiegeling om een vectorrechte gevolgd door een verschuiving.

   Invarianten van een orthogonale transformatie:

   - de hoekgrootte $\longrightarrow$ behoud van loodrechte stand;
   - de lengte van een lijnstuk;
   - de assen, de toppen en de brandpunten van een kegelsnede;
   - de cirkel;
   - de orthogonale hyperbool.

Voorbeeld:
Gegeven is de lineaire permutatie f met matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
De transformatieformules zijn in matrixgedaante $X' = F \cdot X \Longleftrightarrow X = F^{-1}X'$.

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ y = \frac{1}{5}x' + \frac{1}{5}y' \end{cases}$$

We beschouwen in het vervolg alle kegelsneden t.o.v. een orthonormale basis.

1. Bepaal het beeld van de parabool $p : y = x^2$ onder f.

   - $p : x^2 - y = 0 \Longleftrightarrow p' : \frac{1}{25}(2x' - 3y')^2 - \frac{1}{5}x' - \frac{1}{5}y' = 0$

     $$\Longleftrightarrow p' : 4x'^2 - 12x'y' - 9y^2 - 5x' - 5y' = 0$$

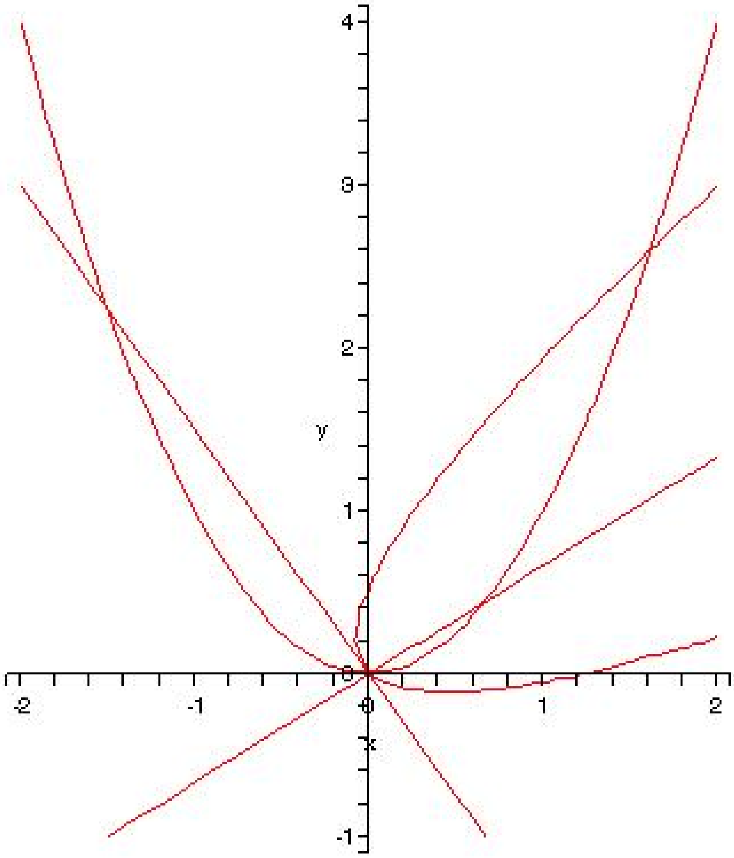
     Het beeld p' is zoals p een parabool door de oorsprong.
   - De as van p':

     $$R' = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \text{ en } \det R' = \delta' = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$$

     Omdat $\delta' = 0$ is, heeft R' een eigenwaarde gelijk aan 0. De andere eigenwaarde is dan de som van de diagonaalelementen van R'. Omdat R' een symmetrische matrix is, behoren bij verschillende eigenwaarden loodrechte eigenvectoren.

Voor $\lambda = 0$ is $-4x + 6y = 0 \iff 2x - 3y = 0$ de eigenruimte die precies de richting is van de as van de parabool p'.
Voor $\lambda = -13$ is $9x + 6y = 0 \iff 3x + 2y = 0$ de eigenruimte. Ze staat loodrecht op de as van de parabool.

TAAK ♣ **120** Bereken nu zelf de vergelijking van de as van p'.



2. Bepaal de vergelijking van het beeld e' van de ellips $e : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ onder f.

- $e : 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \iff e' : \frac{4}{25}(2x' - 3y')^2 + \frac{9}{25}(x' + y')^2 - 36 = 0$

$$\iff e' : 5x'^2 - 6x'y' + 9y^2 - 180 = 0$$

- Het middelpunt van e' is O als beeld van het middelpunt O van e. (middelpunt is een affiene invariant).

- De assen van e':

$$R' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 - 14\lambda + 36 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 7 + \sqrt{13} \vee \lambda = 7 - \sqrt{13}$$

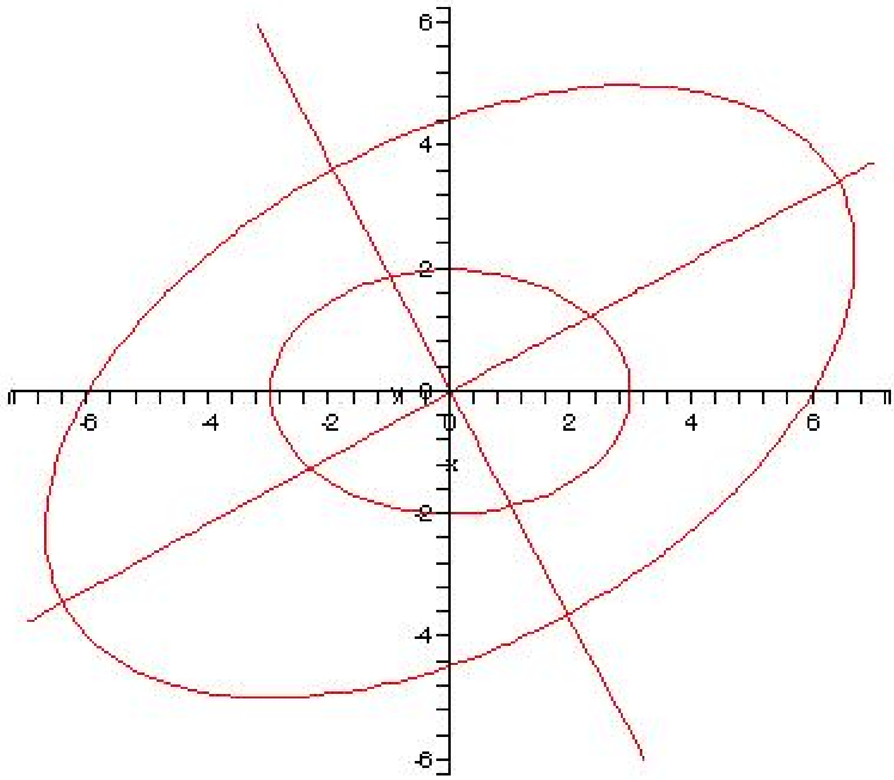
Voor $\lambda = 7 + \sqrt{13}$ is de eigenruimte $(2 + \sqrt{13})x + 3y = 0$.
Voor $\lambda = 7 - \sqrt{13}$ is de eigenruimte $(2 - \sqrt{13})x + 3y = 0$.

Deze twee vectorrechten zijn de assen van de e'.

$\boxed{\textbf{TAAK}}$ ♣ **121** Ga nu zelf na dat deze de assen loodrecht op elkaar staan.

♣ **122** Toon ook aan dat de beelden van de assen van de ellips e, niet de assen zijn van het beeld e' van de ellips (een as is geen affiene invariant).

♣ **123** Bepaal de beelden van de reële brandpunten van de ellips e en kijk op de figuur of die beelden de brandpunten kunnen zijn van e' (een brandpunt is geen affiene invariant).



3. Bepaal de vergelijking van het beeld c' van de cirkel $c : (x-5)^2 + (y+3)^2 y = 4$ onder f. (c is de cirkel met middelpunt $M(5,-3)$ en straal $R = 2$).

   - $c : (x-5)^2 + (y+3)^2 y = 4 \Leftrightarrow c' : x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - 14x' + 36y' + 150 = 0$
     Het beeld van de cirkel is geen cirkel maar een ellips (een cirkel is geen affien invariant).

   - De assen van c': $R' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\delta' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$.
     De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee \lambda = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

     Voor $\lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ is de eigenruimte $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x + y = 0$.
     Voor $\lambda = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ is de eigenruimte $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x + y = 0$.

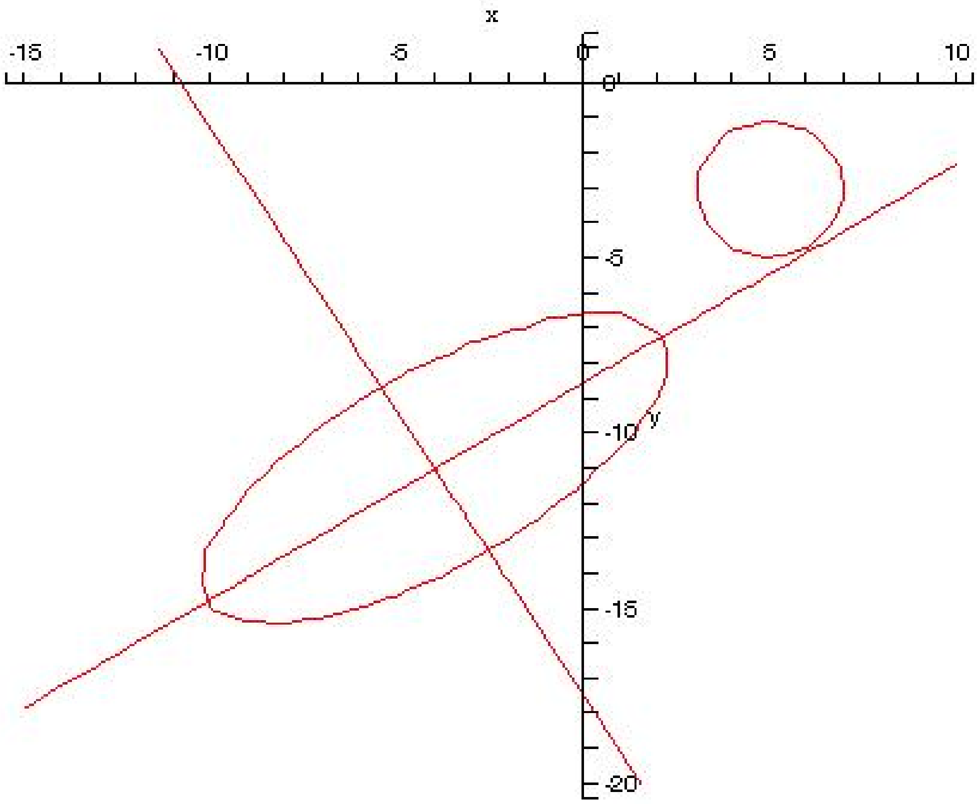
     Deze twee vectorrechten zijn de richtingsruimten van de assen van de ellips c'. Ga nu zelf na dat deze de richtingsruimten orthogonaal zijn.

Het middelpunt van de cirkel wordt afgebeeld op het middelpunt van de ellips (middelpunt is een affiene invariant).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

We vinden de assen van de c' door de eigenruimten te verschuiven over de vector $\vec{v}(-4,-11)$ (plaatsvector van het middelpunt van de ellips c').
$(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(x+4) + (y+11) = 0 \Longleftrightarrow (1+\sqrt{5})x + 2y + 4\sqrt{5} + 26 = 0$
De andere as is $(1-\sqrt{5})x + 2y - 4\sqrt{5} + 26 = 0$.

$\boxed{\textbf{TAAK}}$ ♣ **124** Bereken rechtstreeks het middelpunt en de assen van c'.



4. Bepaal de vergelijking van het beeld h' van de hyperbool $h : y = \frac{6x-5}{4-3x}$ onder f.

- $h : 3xy + 6x - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow h' : 6x'^2 - 3x'y' - 9y'^2 + 40x' - 110y' - 125 = 0$

- De asymptoten van h': h heeft twee asymptoten, nl. een verticale asymptoot $x = \frac{4}{3}$ en een horizontale asymptoot $y = -2$. Het middelpunt van h is $(\frac{4}{3}, -2)$. Vermits een asymptoot een affiene invariant is, zijn de asymptoten van h' de beelden van de asymptoten van h.

$$x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5}x' - \frac{3}{5}y' = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6x' - 9y' - 20 = 0$$
$$y = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x' + \frac{1}{5}y' = -2 \Leftrightarrow x' + y' + 10 = 0$$

TAAK ♣ **125** Bereken rechtstreeks de vergelijkingen van de assen van h en van de asymptoten van h'.

- De assen van h':

$$R' = \begin{pmatrix} 6 & -3/2 \\ -3/2 & -9 \end{pmatrix} \text{ en } \delta' = \begin{vmatrix} 6 & -3/2 \\ -3/2 & -9 \end{vmatrix} = -\frac{225}{4} < 0$$

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 + 15\lambda - \frac{225}{4} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{26}}{2} \vee \lambda = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

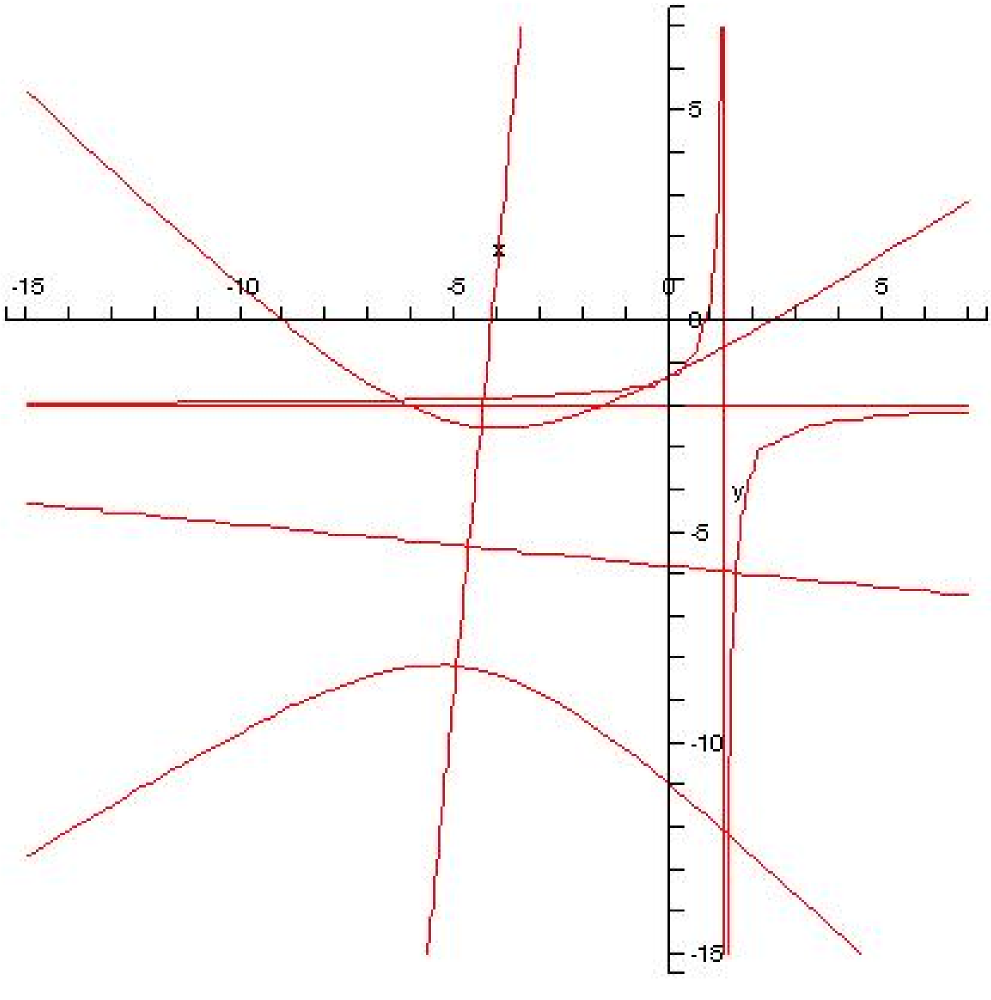
Voor $\lambda = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{26}}{2}$ is de eigenruimte $(5 - \sqrt{26})x - y = 0$.
Voor $\lambda = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{26}}{2}$ is de eigenruimte $(5 + \sqrt{26})x - y = 0$.

Deze twee vectorrechten zijn de richtingsruimten van de assen van h'. Ga nu zelf na dat deze de richtingsruimten orthogonaal zijn.
Het middelpunt van de hyperbool h wordt afgebeeld op het middelpunt van de hyperbool h' (middelpunt is een affiene invariant).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/3 \\ -16/3 \end{pmatrix}$$

We vinden de assen van de h' door de eigenruimten te verschuiven over $\vec{v}(-\frac{14}{3}, -\frac{16}{3})$ (plaatsvector van het middelpunt van de h').
$(5 - \sqrt{26})(x + \frac{14}{3}) - (y + \frac{16}{3}) = 0 \Longleftrightarrow (5 - \sqrt{26})x - y - 14\frac{\sqrt{26}}{3} + 18 = 0$
De andere as is $(5 + \sqrt{26})x - y + 14\frac{\sqrt{26}}{3} + 18 = 0$.

TAAK ♣ **126** Bereken rechtstreeks de coördinaat van het middelpunt van h' en de vergelijkingen van de assen van h'. Ga na of de assen van h' de beelden zijn van de assen van h.



-15
-10
-5
0
5
x
y
5
-5
-10
-15

4.7.1 Diagonalisatie van een matrix

We herhalen de diagonalisatie-eigenschap:

STELLING 4.2 *Stel A is een $n \times n$-matrix met n lineair onafhankelijke eigenvectoren $X_1, \ldots, X_n$. Als $S = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]$, dan is*

$$S^{-1}AS$$

een diagonaalmatrix. De diagonaalelementen zijn de eigenwaarden van A die horen bij resp. de eigenvectoren $X_1, \ldots, X_n$.

We beschouwen de kegelsnede in een euclidisch vlak, d.w.z. t.o.v. een orthonormale basis. Om een matrix R van de orde 2 te kunnen diagonaliseren moeten we een matrix S van de orde 2 vinden zodat de 2 kolomvectoren van S lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn van R. De matrix

$$S^{-1} \cdot R \cdot S$$

is dan een diagonaalmatrix met diagonaalelementen de eigenwaarden van R.

Als we een kegelsnede onderwerpen aan een lineaire permutatie dan geldt voor R':

$$R' = F^{-t} \cdot R \cdot F^{-1}$$

Opdat R' een diagonaalmatrix zou zijn, moet

$$\begin{cases} S^{-1} = F^{-t} \\ S = F^{-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} S = F^{t} \\ S = F^{-1} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$F^{-1} = F^{t}$$

We weten dat voor een orthogonale matrix geldt dat de inverse matrix de getransponeerde is. Een orthogonale matrix behoort bij een lineaire orthogonale transformatie (lineaire rotatie of loodrechte spiegeling).

$$R' = F \cdot R \cdot F^{t}$$

is een diagonaalmatrix waarvan de diagonaalelementen de eigenwaarden van R zijn en F is de geassocieerde matrix van een orthogonale transformatie..

Voorbeelden:

1. Gegeven de kegelsnede

$$h : x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4x + 4\sqrt{3}y - 4 = 0.$$

Zoek de gepaste orthogonale transformatie die de kegelsnede e afbeeldt op een kegelsnede waarvan de vergelijking enkel nog termen in x^2, y^2 en z^2 bevat. Bereken ook de brandpunten van h via deze transformatie en maak een tekening.

Oplossing:

- Aard van h: $\delta = -4$. De kegelsnede is een hyperbool.
- Middelpunt van h: $(-2, 0)$;
- Asymptoten van h: $x + (\sqrt{3} - 2)y + 2 = 0$ en $x + (\sqrt{3} + 2)y + 2 = 0$;
- $$R = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \text{ en } \delta' = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

  De karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 - 4 = 0$.

  Voor $\lambda = 2$ is de eigenruimte $-x + \sqrt{3}y = 0$,
  eigenvector: $(\sqrt{3}, 1)$, genormeerde eigenvector $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.
  Voor $\lambda = -2$ is de eigenruimte $3x + \sqrt{3}y = 0$,
  eigenvector: $(1, -\sqrt{3})$, genormeerde eigenvector $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.
- De orthogonale transformatie is de spiegeling om de vectorrechte die een hoek van 15^o insluit met de x-as:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van de beeldkegelsnede h':

$$2x'^2 - 2y'^2 + \frac{4}{2}(\sqrt{3}x' + y') + \frac{4\sqrt{3}}{2}(x' - 3y') - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x'^2 - 2y'^2 + 4\sqrt{3}x' - 4y - 4 = 0$$

- Het middelpunt van h' is $(-\sqrt{3}, -1)$. We verschuiven h' hyperbool over de vector $\vec{v}(\sqrt{3}, 1)$ tegengesteld aan de plaatsvector van het middelpunt.
  De transformtieformules voor de verschuiving zijn:

$$\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{3} \\ y'' = y' + 1 \end{cases}$$

De vergelijking van de beeldkegelsnede h'':

$$2x''^2 - 2y''^2 = 8 \Longleftrightarrow x''^2 - y''^2 = 4 \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

$$a^2 = b^2 = 4 \Longrightarrow c^2 = 4 + 4 = 8 \Longrightarrow c = 2\sqrt{2}$$

- De brandpunten van h'' zijn de punten $(c, 0) = (2\sqrt{2}, 0)$ en $(-c, 0) = (-2\sqrt{2}, 0)$.
- De brandpunten van h' kunnen we bepalen door de inverse verschuiving toe te passen op de coördinaten van de brandpunten van h''.

$$\begin{cases} x' = x'' - \sqrt{3} \\ y' = y'' - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \\ y' = -1 \end{cases}$$

Voor de brandpunten van h moeten we nog de spiegeling toepassen:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \\ y = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 1) = \sqrt{6} - 2 \\ y = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} \end{cases}$$

De brandpunten van h zijn $(\sqrt{6} - 2, \sqrt{2})$ en $(-\sqrt{6} - 2, -\sqrt{2})$

- Toon aan dat de reële toppen van h de punten zijn: $(\sqrt{3}-2, 1)$ en $(-\sqrt{3}-2, -1)$;

Belangrijke opmerking: De homogene vergelijking van h'' is $x^2 - y^2 - 4z^2 = 0$.
Dat de andere termen ontbreken betekent dat de gronddriehoek een pooldriehoek is.
Elke twee zijden van een pooldriehoek zijn toegevoegde rechten t.o.v. de kegelsnede (want ze gaan door elkaars beelden).
Praktisch betekent dit in het gecompleteerd affien vlak:

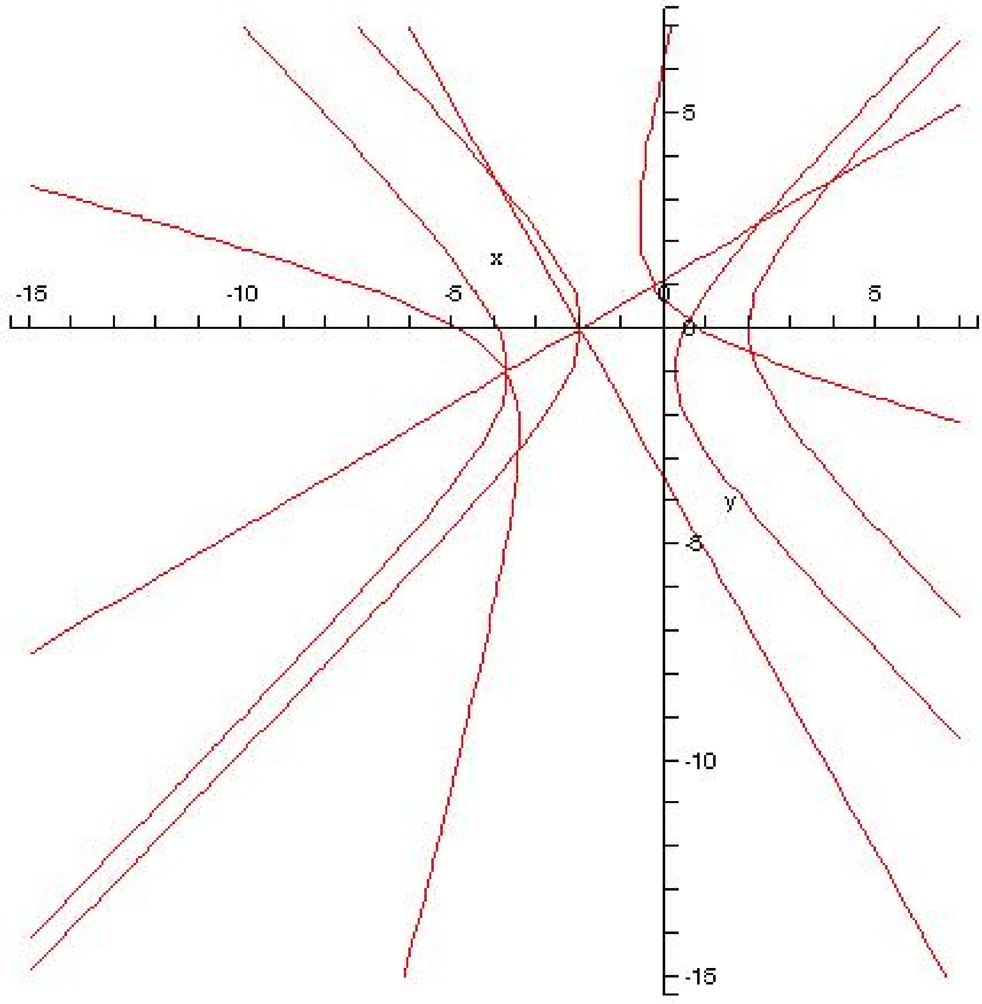
x-as is poollijn is van de y-richting $\longrightarrow$ x-as is een middellijn van h'',
y-as is poollijn van de x-richting $\longrightarrow$ y-as is een middellijn van h''.
de oneigenlijke rechte de poollijn van $O \longrightarrow O$ is middelpunt van h'';
x-as en y-as zijn toegevoegde middellijnen die orthogonaal zijn dus zijn ze de assen van de kegelsnede.

TAAK ♣ **127** Bereken op twee manieren de assen van de bovenstaande hyperbool. Teken de asymptoten en construeer de reële brandpunten. Controleer met de coördinaten van de brandpunten.

♣ **128** Gegeven de kegelsnede

$$e : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32y + 48 = 0.$$

Zoek de gepaste orthogonale transformatie die de kegelsnede e afbeeldt op een kegelsnede e' waarvan de vergelijking enkel nog enkel termen in x^2, y^2 en z^2 bevat. Bereken ook de brandpunten van e via deze transformatie en maak een tekening.



2. Herleid de vergelijking van de volgende kegelsnede naar zijn gereduceerde gedaante d.m.v. een orthogonale coördinatentransformatie.

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 4y = 0$$

Oplossing:

- $$R = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \delta' = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

  De kegelsnede is een parabool.

  Voor $\lambda = 0$ is de eigenruimte $9x - 3y = 0 \Longleftrightarrow 3x - y = 0$,
  eigenvector: $(1, 3)$, genormeerde eigenvector $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.
  Voor $\lambda = 10$ is de eigenruimte $x + 3y = 0$,
  eigenvector: $(3, -1)$, genormeerde eigenvector $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$.

- Voor de orthogonale transformatie kiezen we de inverse van de rotatie om O over de hoek $\arctan(3)$, dus de rotatie om O over de hoek $-\arctan(3)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van de beeldkegelsnede p':

$$0 \cdot x'^2 + 10y'^2 + 4(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{10}y') = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$5y'^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0$$

- De as van p' is de poollijn van de loodrechte richting van de asymptotische richting, nl. van $(0, 1, 0)$.

$$10y' + \frac{2}{\sqrt{10}} = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{1}{5\sqrt{10}}$$

  De top van p' is de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{5\sqrt{10}} \\ 5y'^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{10}}{300} \\ y' = -\frac{1}{5\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{50} \end{cases}$$

  We verschuiven p' hyperbool over de vector $\vec{v}(-\frac{\sqrt{10}}{300}, \frac{\sqrt{10}}{50})$ tegengesteld aan de plaatsvector van de top.
  De transformtieformules voor de verschuiving zijn:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{300} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{10}}{50} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{300} \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{10}}{50} \end{cases}$$

De vergelijking van de beeldkegelsnede p'':

$$5(y'' - \frac{\sqrt{10}}{50})^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}(x'' + \frac{\sqrt{10}}{300}) + \frac{2}{\sqrt{10}}(y'' - \frac{\sqrt{10}}{50}) = 0$$

$$\iff 5y''^2 + 3\frac{\sqrt{10}}{5}x'' = 0 \iff y''^2 = -\frac{3\sqrt{10}}{25}x''$$

$$2p = -\frac{3\sqrt{10}}{25} \Longrightarrow p = -\frac{3\sqrt{10}}{50}$$

- Het brandpunten van p'' is het punt $(\frac{p}{2}, 0) = (-\frac{3\sqrt{10}}{100}, 0)$.
- Het brandpunt van p kunnen we bepalen door de inverse transformaties toe te passen op het brandpunt van p''.
  Eerst de inverse van de verschuiving

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{300} \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{10}}{50} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{3\sqrt{10}}{300} + \frac{\sqrt{10}}{300} = -\frac{2\sqrt{10}}{75} \\ y' = -\frac{\sqrt{10}}{50} \end{cases}$$

Nu nog de rotatie over arctan(3) toepassen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{10}}{75} \\ -\frac{\sqrt{10}}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Het brandpunt van p is $(-\frac{1}{30}, -\frac{1}{10})$.

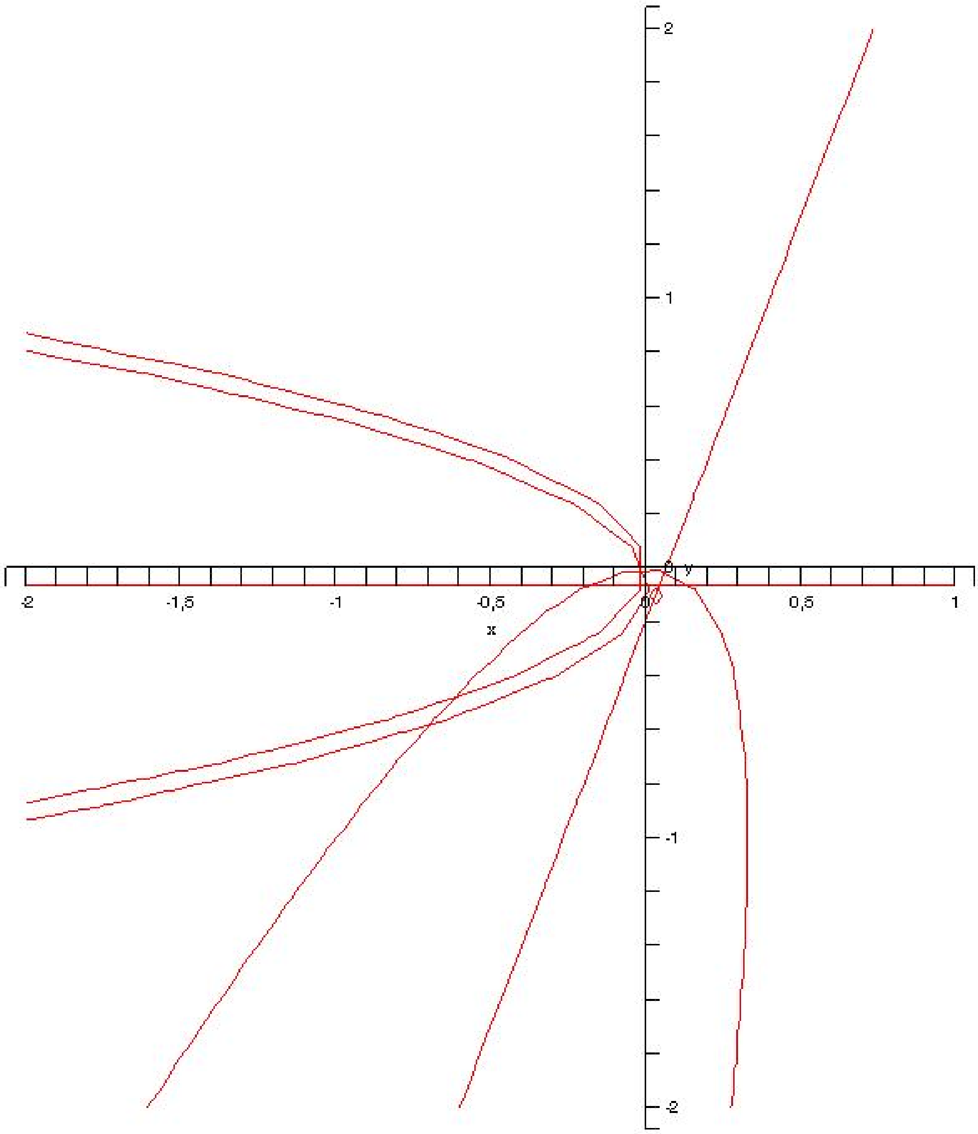
$\boxed{\text{Belangrijke opmerking}}$: De homogene vergelijking van p'' is $y^2 - 2pxz = 0$. Bij een parabool kan de grondriehoek geen pooldriehoek zijn omdat de parabool raakt aan de oneigenlijke rechte. De oneigenlijke rechte is poollijn van de asymptotische richting die onmogelijk de oorsprong (eigenlijk punt) kan zijn.

x^2-term ontbreekt $\longrightarrow$ x-richting is asymptotische richting voor p'';

xy-term ontbreekt $\longrightarrow$ x-richt en y-richt zijn toegevoegde richtingen. Ze zijn orthogonaal dus zijn ze de hoofdrichtingen van p'';

y-term ontbreekt $\longrightarrow$ x-as is as van (loodrechte) symmetrie van p'' want als je y vervangt door $-y$ verandert de vergelijking niet.

de constante ontbreekt $\longrightarrow$ p'' gaat door O dat de top is van p''.



TAAK ♣ **129** Bereken op twee manieren de vergelijking van de as van de bovenstaande gegeven parabool. Teken de richtlijn. Controleer de juistheid van het brandpunt op de tekening.

AN.MTK.II HUISTAAK 1

1. Gegeven is de ellips

$$e : 7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 + 14x + 4\sqrt{3}y - 2 = 0.$$

   (a) Bereken d.m.v. een rotatie om O de reële brandpunten van e;
   (b) Bereken d.m.v. van diezelfde rotatie de vergelijkingen van de vier topraaklijnen van e en teken ze;
   (c) Schets de ellips e;
   (d) Construeer de reële brandpunten en controleer met de berekeningen uit 1a.

2. Gegeven is de parabool $p : 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 10x + 55y + 75 = 0$.

   (a) Bepaal de hoofdparameter $2p$ van de gegeven parabool;
   (b) Bepaal op twee verschillende manieren de as van p;
   (c) Bepaal de vergelijking van de topraaklijn van p.

3. Gegeven is de hyperbool $h : 2x^2 - 4xy - 2y^2 - x + y - 3 = 0$.

   (a) Bepaal een orthogonale transformatie die de hyperbool afbeeldt op een hyperbool h'' waarvan de vergelijking een gereduceerde gedaante heeft;
   (b) Teken h'';
   (c) Construeer de assenrechthoek van h'' en teken de asymptoten;
   (d) Construeer de brandpunten van h'';
   (e) Bepaal de coördinaten van de reële brandpunten van h;
   (f) Bij welke eigenwaarde behoort de hoofdas van h;
   (g) Bepaal op twee verschillende manieren de vergelijking van de hoofdas van h;

OPGAVEN — **130** Herleid de volgende kegelsneden naar een gereduceerde gedaante en maak een schets.

1. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}x + 36 = 0$;
2. $4x^2 + 10xy + 4y^2 - 12x - 15y = 0$;
3. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 8 = 0$;
4. $4x^2 - 20xy - 11y^2 + 36x - 18y - 99 = 0$.

131 Gegeven is in het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis de volgende kegelsnede

$$ax^2 - (1 + a^2)xy + ay^2 + 1 = 0$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van de constante a;

(ii) De gereduceerde vergelijking na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

132 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$txy - x - y + 1 = 0$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van de constante t.

(ii) De gereduceerde vergelijking voor $t = 2$ na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

(iv) De meetkundige plaats van de toppen.

133 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$2x^2 + txy - 2y^2 - 4x - 3y = 0.$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van t.

(ii) De gereduceerde vergelijking voor $t = 3$ na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

134 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$2x^2 - 8xy + 8y^2 - 6x + 7y = 0.$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede

(ii) De gereduceerde vergelijking na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

135 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$xy - ty + 2t = 0.$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van de constante t.

(ii) De gereduceerde vergelijking voor $t = 1$ na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede voor $t = 1$.

136 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 + 4x - 5y + a^2 + 2 = 0.$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van de constante a.

(ii) De gereduceerde vergelijking na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

137 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de volgende kegelsnede gegeven

$$t^2x^2 - 2txy + y^2 + 4x + 4ty - 4 = 0.$$

Gevraagd:

(i) De aard, het middelpunt, de asymptoten en de assen van de kegelsnede al naar gelang de waarde van de constante t.

(ii) De gereduceerde vergelijking voor $t = 2$ na toepassen van een orthogonale transformatie. Geef de matrix van deze orthogonale transformatie.

(iii) De reële toppen en reële brandpunten van de kegelsnede.

138 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is een parabool gegeven die de x-as en de y-as raakt in resp. de punten $a(2, 0)$ en $b(0, 2)$. Gevraagd:

(i) De vergelijking van de parabool.

(ii) De vergelijking van de as van de parabool.

(iii) De top en de topraaklijn van de parabool.

(iv) De gereduceerde vergelijking van de parabool en de orthogonale transformatie.

(v) Het brandpunten en de richtlijn van de parabool.

139 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is de top $(1, -2)$ en de as $A : x - y - 3 = 0$ van een parabool die door de oorsprong gaat gegeven. Gevraagd:

(i) De vergelijking van de parabool.

(ii) De gereduceerde vergelijking van de parabool en de orthogonale transformatie.

(iii) Het brandpunten en de richtlijn van de parabool.

(iv) Het punt waarin de raaklijn parallel is met de x-as.

140 In het euclidisch vlak t.o.v. een orthonormale basis is gegeven de kegelsneden $5x^2 - 6xy + 5ay^2 + 2bx - 16 = 0$.
Gevraagd:

(i) De vergelijking van de kegelsnede K waarvoor de rechte $x + y = 0$ een as is.

(ii) De aard van K, het middelpunt, de hoofdrichtingen, de top;

(iii) De gereduceerde vergelijking van de parabool en de orthogonale transformatie, de brandpunten.

Oplossingen:

130:

1. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}x + 36 = 0$;

   (i) Aard: $\delta = 0$ en $\Delta = -576$. De kegelsnede is een parabool.
   $$p = -12.$$
   (ii) As: $x - \sqrt{3}y = -2\sqrt{3}$ en top: $(-\sqrt{3}, 1)$;

   (iii) Gereduceerde gedaante:
   $${y'}^2 = -6x;$$
   Orthogonale transformatie:
   $$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & -2\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$
   (iv) $\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$ Het brandpunt: $(-\frac{7\sqrt{3}}{4}, \sqrt{1}4)$.

2. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 8 = 0$;

   (i) Aard: $\delta = 0$ en $\Delta = -16$. De kegelsnede is een parabool.
   $$k = 2.$$
   (ii) As: $\sqrt{3}x - y = 0$ en top: $(1, \sqrt{3})$;

   (iii) Gereduceerde gedaante:
   $${y'}^2 = x;$$
   Orthogonale transformatie:
   $$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(iv) $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$ Het brandpunt: $(\frac{9}{8}, \frac{9\sqrt{3}}{8})$.

3. $4x^2 - 20xy - 11y^2 + 36x - 18y - 99 = 0$.

   (i) Aard: $\delta = -144$ en $\Delta = 20736$. De kegelsnede is een hyperbool.

   $$\frac{\Delta}{\delta} = -144.$$

   (ii) Middelpunt: $(-2, 1)$;

   (iii) Asymptoten: $2x - 11y + 15 = 0$ en $2x + y + 3 = 0$;

   (iv) Eigenwaarden en hoofdrichtingen: $\lambda_1 = 9$ met $(2, -1, 0)$ en $\lambda_2 = -16$ met $(1, 2, 0)$;

   (v) De gereduceerde gedaante:

   $$9{x'}^2 - 16{y'}^2 = 144;$$

   Orthogonale transformatie:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2\sqrt{5} \\ -1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1}.$$

   (vi) De reële toppen: $(\frac{8-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \frac{-4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})$ en $(-\frac{8+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})$.

   $c = 5$. De reële brandpunten: $(2\sqrt{5} - 2, 1 - \sqrt{5})$ en $(-2\sqrt{5} - 2, 1 + \sqrt{5})$.

131

(i) Aard: $\delta = \Delta = -\frac{1}{4}(a-1)^2(a+1)^2$: ∞ veel niet-ontaarde hyperbolen en twee ontaarde parabolen.
Ontaarde parabolen: $(x+y)^2 = 1$ en $(x-y)^2 = -1$.
Middelpunt: $(0, 0)$ want de x-term en de y-term ontbreken.
Asymptotische richtingen: $(a, 1, 0)$ en $(1, a, 0)$.
Asymptoten: $x - ay = 0$ en $ax - y = 0$.
Hoofdrichtingen:
voor de eigenwaarde $s = \frac{(a+1)^2}{2}$ is $(1, -1, 0)$ de hoofdrichting, voor de eigenwaarde $s = -\frac{(a-1)^2}{2}$ is $(1, 1, 0)$ de hoofdrichting.
Assen: $x + y = 0$ en $x - y = 0$. Toppen: $a \neq 1$: $(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1})$ en $(\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1})$

(ii) Gereduceerde gedaante: Als $\delta \neq 0$: $-\frac{1}{2}(a-1)^2x^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2y^2 + 1 = 0$.
Voor $a = -2$: $9x^2 - y^2 - 2 = 0$.
Als $\delta = 0$: $y^2 \pm 1 = 0$.
Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

(iii) Brandpunten :

$$(\frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{a^2-1}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{a^2-1}) \text{ en } (-\frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{a^2-1}, -\frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{a^2-1}).$$

132

(i) Aard: $\delta = -\frac{t^2}{4}$; $\Delta = \frac{1}{4}t(1-t)$: De kegelsnedenbundel bevat ∞ veel hyperbolen, waarvan er twee ontaard zijn en 1 ontaarde parabool.
Ontaarde hyperbolen: $xy = 0$ en $(x-1)(y-1) = 0$.
Ontaarde parabool: $(x+y-1)z = 0$.
Middelpunt: $(\frac{1}{t}, \frac{1}{t})$ voor $t \neq 0$.
Asymptotische richtingen: $(1,0,0)$ en $(0,1,0)$.
Asymptoten: $ty - 1 = 0$ en $tx - 1 = 0$.
Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = \frac{t}{2}$ is $(1,1,0)$ hoofdrichting voor eigenwaarde $s = -\frac{t}{2}$ is $(1,-1,0)$ hoofdrichting
Assen: $tx + ty - 2 = 0$ en $-tx + ty = 0$.

(ii) Orthogonale transformatie: Voor $t = 3$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$.

(iii) Toppen: Voor $t = 2$: $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ en $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Brandpunten:

$$(\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{-\sqrt{2}+1}{2}) \text{ en } (\frac{-\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2})$$

133

(i) Aard: $\delta = -4 - \frac{t^2}{4}$; $\Delta = 3t + \frac{7}{2}$: De kegelsnedenbundel bevat ∞ veel hyperbolen, waarvan er twee ontaard zijn.
Ontaarde hyperbolen: $xy = 0$ en $12x^2 - 7xy - 12y^2 - 24x - 18y = 0$
Middelpunt: $(\frac{16+3t}{16+t^2}, \frac{4(t-3)}{16+t^2})$
Middelpunt: voor $t = 3$: $(1,0)$
Asymptotische richtingen: $(4, t \pm \sqrt{t^2+16}, 0)$. voor $t = 3$: $(1,2,0)$ en $(2,-1,0)$.
Asymptoten: Voor $t = 3$: $2x - y - 2 = 0$ en $x + 2y - 1 = 0$.
Hoofdrichtingen: Voor $t = 3$: voor eigenwaarde $s = \frac{5}{2}$ is $(3,1,0)$ hoofdrichting
voor eigenwaarde $s = -\frac{5}{2}$ is $(1,-3,0)$ hoofdrichting
Assen: Voor $t = 3$: $x - 3y - 1 = 0$ en $3x + y - 1 = 0$.

(ii) Orthogonale transformatie: Voor $t = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{10} \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $5x^2 - 5y^2 - 4 = 0$

(iii) Toppen: Voor $t = 3$: $(\pm\frac{3\sqrt{2}}{5} + 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{5}, 1)$
Brandpunten t.o.v. het nieuw coördinatenstelsel: hier is $c = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
Brandpunten :

$$(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}) \text{ en } (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$$

134

(i) Aard: $\delta = 0$; $\Delta = -\frac{25}{2}$: De kegelsnede is een niet-ontaarde parabool.
Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = 0$ is $(2, 1, 0)$ de asymptotische richting voor eigenwaarde $s = 10$ is $(1, -2, 0)$ de loodrechte richting van de asymptotische richting.
As: $x - 2y - 1 = 0$

(ii) Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -3 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $10y^2 = \sqrt{5}x$.

(iii) Top: $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$
Brandpunt : $(-\frac{11}{20}, -\frac{31}{40}, 1)$

135 $xy - ty + 2t = 0$

(i) Aard: $\delta = -\frac{1}{4}$; $\Delta = -\frac{t}{4}$: De kegelsnedenbundel bevat enkel hyperbolen, waarvan er twee ontaard zijn, nl. $xy = 0$ en $(y - 2)z = 0$.
Middelpunt: $(t, 0)$
Asymptotische richtingen: $(1, 0, 0)$ en $(0, 1, 0)$. Asymptoten: $y = 0$ en $x = t$.
Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = \frac{1}{2}$ is $(1, 1, 0)$ hoofdrichting voor eigenwaarde $s = -\frac{1}{2}$ is $(1, -1, 0)$ hoofdrichting
Assen: $x + y - t = 0$ en $x - y - t = 0$

(ii) Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & t\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Voor $t = 1$: Gereduceerde vergelijking: $x^2 - y^2 + 2 = 0$;

(iii) Toppen: Voor $t = 1$: $(0, 1)$ en $(2, -1)$.
Voor $t = 1$: hier is $c = 2$
Brandpunten : $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $(1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(iv) Meetkundige plaats van de middelpunten: $y = 0$.
Meetkundige plaats van de toppen: $x = \frac{1}{2}y^2 - y$ en $x = -\sqrt{1}2y^2 - y$, dit zijn twee niet-ontaarde parabolen.

136 $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 4x - 5y + a^2 + 2$.

(i) Aard: $\delta = -\frac{9}{4}$; $\Delta = -\frac{9}{4}a^2$; De kegelsnedenschaar bevat ∞ veel hyperbolen, waarvan er één ontaard is.
Ontaarde hyperbool:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 + 4x - 5y + 2 = 0 \Longleftrightarrow (2x - y + 2)(x - 2y + 1) = 0.$$

Middelpunt: $(-1, 0)$.
Asymptotische richtingen: $(1, 2, 0)$ en $(2, 1, 0)$.
Asymptoten: $2x - y + 2 = 0$ en $x - 2y + 1 = 0$.
Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = \frac{9}{2}$ is $(1, -1, 0)$ hoofdrichting voor eigenwaarde $s = -\frac{1}{2}$ is $(1, 1, 0)$ hoofdrichting.
Assen: $x + y + 1 = 0$ en $x - y + 1 = 0$.
Meetkundige plaats van de reële toppen: $y = x + 1$, di. de hoofdas.

(ii) Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $x^2 - 9y^2 - 2a^2 = 0$.

(iii) Toppen: $(-1 + a, a)$ en $(-1 - a, -a)$;
Voor $a = 3$: $(2, 3)$ en $(-4, -3)$.
Brandpunten t.o.v. het nieuw coördinatenstelsel: hier is $c = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$.
Brandpunten :

$$(\frac{\sqrt{10}}{3}a - 1, \frac{\sqrt{10}}{3}a) \text{ en } (-\frac{\sqrt{10}}{3}a - 1, -\frac{\sqrt{10}}{3}a).$$

138

(i) Vergelijking van de parabool: $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ met $\Delta = -24$.

(ii) Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = 0$ is $(1, 1, 0)$ de asymptotische richting; voor eigenwaarde $s = 2$ is $(1, -1, 0)$ de loodrechte richting van de asymptotische richting.
As: $x - y = 0$, topraaklijn: $x + y = 1$;

(iii) Top: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Topraaklijn: $x + y = 1$.

(iv) Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $y^2 = 2\sqrt{2}x$.

(v) Brandpunt : $(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2})$

139

(i) Vergelijking van de parabool: $x^2 - 2xy + y^2 - 15x - 3y = 0$ met $\Delta = -81$.

(ii) Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = 0$ is $(1, 1, 0)$ de asymptotische richting; voor eigenwaarde $s = 2$ is $(1, -1, 0)$ de loodrechte richting van de asymptotische richting.
As: $x - y - 3 = 0$, topraaklijn: $x + y + 1 = 0$;
Top: $(1, -2)$.
Orthogonale transformatie:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $y^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}x$.

(iii) Brandpunten: $(\frac{17}{8}, -\frac{7}{8})$.

140

(i) $5x^2 - 6xy + 5ay^2 + 2bx - 16 = 0$
Als $a = 1$ en $b = 0$ dan is $x + y = 0$ een as van de kegelsnede.

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 0$$

(ii) Aard: $\delta = 16$; $\Delta = -16^2$: De kegelsnede is een niet-ontaarde ellips
Middelpunt: $(0, 0)$ want de x-term en de y-term ontbreken.
Hoofdrichtingen: voor eigenwaarde $s = 2$ is $(1, 1, 0)$ hoofdrichting voor eigenwaarde $s = 8$ is $(1, -1, 0)$ hoofdrichting
Assen: $x + y = 0$ en $-x + y = 0$.
Toppen: $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(1, -1)$ en $(-1, 1)$.

(iii) Orthogonale transformatie: Voor $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gereduceerde vergelijking: $2x^2 + 8y^2 - 16 = 0$.
Brandpunten: $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ en $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Inhoudsopgave